241

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : Soient X un ensemble et (E,d) un espace métrique

I) Suites et séries de fonctions

A] Convergence et critères

Def 1 : Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E et $f : X \to E$

- (f_n) converge simplement (C.S.) vers f si : $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$
- (f_n) converge uniformément (C.U.) vers f si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$

Prop 2 : Si (f_n) C.U. vers f, alors (f_n) C.S. vers f.

Ex 3 : La suite : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0 mais pas uniformément. On dispose néanmoins d'une réciproque partielle dans $\mathbb{R}$:

Thm 4 : (de Dini) Si (f_n) est suite croissante de fonctions continues, sur X compact, et C.S. vers f continue, alors on a aussi C.S.

On suppose maintenant E de Banach.

Thm 5 : (critère de Cauchy uniforme) (f_n) converge uniformément si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$.

Def 6 : Une série de fonctions $(\sum f_n)$ est une suite (S_n) de fonctions $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Si les (f_n) sont bornées, on dit que $(\sum f_n)$ converge normalement (C.N.) si $(\sum \|f_n\|_\infty)$ converge.

Rem 7 : Ceci est équivalent à dire qu'il existe (a_n) une suite de réels positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

Thm 8 : (C.N.) implique (C.U.).

Rem 9 : La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$

Thm 10 : (de Weierstrass) DEV 1 Toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes

B] Transfert de régularité

On suppose que X est un espace métrique.

Prop 11 : Soit $x_0 \in X$. Si (f_n) C.U. vers f et que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 alors f est continue en x_0.

Rem 12 : La C.S. ne suffit pas : voir Ex 3.

Cor 13 : Si $(\sum f_n)$ C.N. et que les f_n sont continues, alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est définie et continue.

On suppose que X est un segment de $\mathbb{R}$, $X = [a,b]$.

Thm 14 : Soit (f_n) une suite de fonctions C^1 de $[a,b]$ dans E. On suppose que :

- $\exists x_0 \in X$, $(f_n(x_0))$ converge (ou que (f_n) C.S.)
- (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.

Alors (f_n) C.U. vers $f : [a,b] \to E$ C^1 tel que $f' = g$.

Cor 15 : Soit $(\sum g_n)$ une série de fonctions C^1 de $[a,b]$ dans E. On suppose que $\exists x_0 \in X$, $(\sum g_n(x_0))$ converge et que $(\sum g_n')$ C.N. Alors $(\sum g_n)$ C.N. et $(\sum_{n=0}^{\infty} g_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'$

Ex 16 : Si E est une algèbre normée complète, soit $e_u : \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u^n$. $(\sum \frac{t^n}{n!} u^n)$ C.N. sur tout compact donc e_u est C^1 et $e_u' = u\, e_u$

C] Intégration d'une suite de fonctions

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Thm 17 : (de Beppo-Levi) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable et $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$.

Ex 18 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, soit $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$. Alors

$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ -\infty & \text{si } \alpha \geq 1\end{cases}$

Cor 19 : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n \, d\mu$

Lem 20 : (de Fatou) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}\int_X f_n \, d\mu$

Ex 21 : Si $\forall n\in\mathbb{N}, f_n\in\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X|f_n|\,d\mu<+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ [4]

Thm 22 : (de convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que :
① Pour presque tout $x\in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$
② $\exists g\in\mathcal{L}^1(\mu), \forall n\in\mathbb{N}, |f_n|\leq g$ presque partout.
Alors $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Cor 23 : Soit (f_n) une suite de fonctions telle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$. Alors $\sum f_n \in \mathcal{L}^1$ et $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n \, d\mu$

II) Séries entières

A] Définitions, rayon de convergence

Def 24 : On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$ où $\forall n\in\mathbb{N}, \exists a_n\in\mathbb{C}, f_n : \mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto a_n z^n$.

Lem 25 : (d'Abel) Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. Soit $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est borné. Alors $\forall r\in]0;|z_0|[$, $(\sum a_n z^n)$ converge normalement (et donc absolument) sur $\overline{D(0,r)}$. [4]

Prop-def 26 : Soit $R = \sup\{e\geq 0 \mid (a_n e^n) \text{ est borné}\}$. R est caractérisé par la propriété :
$\begin{cases} \forall z\in\mathbb{C}, |z|<R \Rightarrow (\sum a_n z^n) \text{ converge absolument} \\ \forall z\in\mathbb{C}, |z|>R \Rightarrow (\sum a_n z^n) \text{ diverge grossièrement.}\end{cases}$

R est appelé rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$.

Ex 27 : $(\sum z^n)$ est de rayon 1, $(\sum \frac{1}{n!}z^n)$ est de rayon $+\infty$ [1]

Thm 28 : (de Cauchy-Hadamard) $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, |a_n|^{1/n}$

B] Régularité des séries entières

Lem 29 : $(\sum_{n\geq1} n a_n z^{n-1})$ possède le même rayon que $(\sum a_n z^n)$

Thm 30 : Soit f la somme de $(\sum a_n z^n)$ sur $D(0,R)$ où R est le rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$. Alors f est holomorphe sur $D(0,R)$ et $\forall z\in\mathbb{C}$, $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Def 31 : Soient $U\subset\mathbb{C}$ ouvert et $f:U\to\mathbb{C}$. f est dit développable en série entière (DSE) en $z_0\in U$ s'il existe $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $r>0$ tel que $\forall z\in D(z_0,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. [2]
f est dit analytique sur U si $\forall z_0\in U$, f est DSE en z_0.

Thm 32 : Soit $U\subset\mathbb{C}$ ouvert et soit $f:U\to\mathbb{C}$. f est holomorphe si et seulement si f est analytique sur U.

Rem 33 : On ne peut en général pas prévoir le comportement d'une série entière sur le bord de son disque de convergence. Par exemple, $(\sum z^n)$ ne se prolonge pas analytiquement en 1.

Def 34 : Soit f la somme de $(\sum a_n z^n)$ sur le disque de convergence $D(0,R)$. $z_0\in \mathcal{C}(0,R)$ est dit régulier si f se prolonge analytiquement au voisinage de z_0. Il est dit singulier sinon. On note A_r l'ensemble des points réguliers et A_s l'ensemble des points singuliers.

Prop 35 : Si $R<\infty$, $A_s\neq\emptyset$.

Thm 36 : (des lacunes d'Hadamard) Soit $(\sum a_n z^{\lambda_n})$ une série entière de rayon 1, où (λ_n) est une suite croissante d'entiers tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geq\alpha>1$. Alors $A_r=\emptyset$.

[1]

Thm 37 : (d'Abel angulaire) Soit $(\sum a_n z^n)$ de rayon supérieur à 1 telle que $(\sum a_n)$ converge. Soit f sa somme et soit $\theta_0 \in [0;\pi/2[$. On pose $\Delta_{\theta_0} = \{1-\rho e^{i\theta} \in D(0,1) \mid \theta \in [-\theta_0;\theta_0], \rho>0\}$. Alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Thm 38 : (Taubérien faible) On suppose cette fois que $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=S$ existe et $a_n = \underset{\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(\sum a_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

III) Séries de Fourier

Soit C l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques. $(C, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach où $\forall f\in C$, $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 2\pi} |f(x)|$. Pour $p\geq 1$, soit L^p l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables 2π-périodiques telles que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt < +\infty$. On pose $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ qui est une norme sur L^p.

A] Coefficients et série de Fourier

[2]

Thm 39 : L^2 est un espace de Hilbert muni de : $\forall f,g\in L^2$, $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. De plus, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale où $\forall n\in\mathbb{Z}$, $e_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{int}\end{array}$

Def 40 : Soit $f\in L^1$. On définit son n-ème coefficient de Fourier par : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$. Soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$. $(S_n(f))_{n\geq 0}$ est appelé série de Fourier de f. On dit qu'elle converge normalement si $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|<+\infty$

Rem 41 : Si $f\in L^2$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

[1]

Ex 42 : Si $\forall t\in[-\pi,\pi]$, $f(t) = 1-\frac{t^2}{\pi^2}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$, et $c_n(f) = \frac{2}{3}$ si $n=0$, $c_n(f) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n^2\pi^2}$ sinon.

[2]

Lem 43 : (de Riemann-Lebesgue) $\forall f\in L^1$, $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

B] Convergence de la série de Fourier

[2]

Nous nous intéressons à la reconstruction de f à partir de sa série de Fourier.

Prop-def 44 : Soient $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ et $K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$ les noyaux de Dirichlet et de Fejér, $N\in\mathbb{N}^*$. Alors :
- $\forall x\in]0;2\pi[$, $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$, $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$
- $\|D_N\|_1 = \|K_N\|_1 = 1$.

Rem 45 : Si $\sigma_N(f)$ est la N-ème somme de Césaro de $S_n(f)$ alors $S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f*K_N$

Thm 46 : (DEV2) (de Fejér) $\forall f\in C$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\forall f\in L^p, p<\infty$, $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f)-f\|_p \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

App 47 : Ceci donne une autre preuve du théorème de Weierstrass.

App 48 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

Cor 49 : $\forall f\in L^2$, $\|S_n(f)-f\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Cor 50 : Si $f\in C$ et C^1 p.m., $(S_n(f))$ C.N. et $f = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)$.

Thm 51 : (de Dirichlet). Si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^+(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ >}} f(x+t)$ et $f^-(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ <}} f(x+t)$ existent, si f admet des dérivées à droite et à gauche en tout point alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f^+(x)+f^-(x)}{2}$

[3]

App 52 : (DEV3) (équation de la chaleur sur le cercle) Soit $u_0\in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\mathbb{R})$. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ admet une unique solution $u :]0;+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ C^2 telle que $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} u_0$.

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Eléments d'analyse, Queffélec & Zuily [2]
- Calcul intégral, Candelpergher [3]
- Théorie de l'intégration, Briane-Pagès [4]