243

Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

I) Séries entières et rayons de convergence

A] Rayon de convergence

Def 1: On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $(\sum a_n z^n)$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Lem 2: (d'Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{C}$, si $|z| < |z_0|$ alors $(\sum a_n z^n)$ converge absolument
- Pour tout $r \in]0 ; |z_0|[$, $(\sum a_n z^n)$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Ceci rend légitime la définition suivante :

Def 3: On définit le rayon de convergence par : $R = \sup\{ r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ bornée} \}$. Le disque de convergence de la série entière est $D(0, R)$.

Cor 4: Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < R$, $(\sum a_n z^n)$ converge absolument. Si $|z| > R$, elle diverge grossièrement. Ceci caractérise R.

Rem 5: Si $R = 0$, $(\sum a_n z^n)$ ne converge que pour $z = 0$. Si $R = +\infty$, $(\sum a_n z^n)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Ex 6: $(\sum z^n)$ est une série entière de rayon 1 et :
$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

B] Calcul du rayon de convergence

Prop 7: (Règle de d'Alembert) Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0 ; +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\lambda}$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Ex 8: La série exponentielle $(\sum \frac{z^n}{n!})$ est de rayon $+\infty$. On note e^z ou $\exp(z)$ sa somme.

Prop 9: (Règle de Cauchy) Si $\lim_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0 ; +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$ (toujours avec la même convention).

Ex 10: $(\sum 2^n z^n)$ est de rayon $1/2$ (on aurait aussi pu utiliser la règle d'Alembert)

Rem 11: Ces règles sont pratiques mais ne s'appliquent pas toujours. On dispose alors du théorème suivant :

Thm 12: (de Hadamard) Pour toute série entière $(\sum a_n z^n)$ de rayon R, alors $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} |a_n|^{1/n}$

Ex 13: $(\sum z^{2n})$ est de rayon 1.

C] Opérations sur les séries entières

Prop-def 14: Soient $(\sum a_n z^n)$ et $(\sum b_n z^n)$ deux séries entières de rayons R et R'. Alors $(\sum (a_n + b_n) z^n)$ est une série entière de rayon R'' vérifiant $R'' \geq \min(R, R')$. C'est la série entière somme de $(\sum a_n z^n)$ et $(\sum b_n z^n)$. De plus, si $z \in D(0, \min(R, R'))$,
$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Prop-def 15: On définit la série produit de $(\sum a_n z^n)$ et $(\sum b_n z^n)$ par $(\sum c_n z^n)$ où $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors c'est une série entière de rayon R'' vérifiant $R'' \geq \min(R, R')$. De plus, si $z \in D(0, \min(R, R'))$, alors
$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$

Rem 16: On ne peut en général rien dire de plus sur R''. Par exemple, $(\sum z^n)$ et $(\sum -z^n)$ sont de rayons 1 mais leur somme est de rayon $+\infty$.

[1] **Def 17 :** On appelle série entière dérivée de $(\sum a_n z^n)$ la série entière $(\sum (n+1)a_{n+1} z^n)$

Prop 18 : $(\sum a_n z^n)$ et $(\sum (n+1)a_{n+1} z^n)$ ont même rayon de convergence.

II) Propriétés des séries entières

A] Régularité sur $\mathbb{R}$

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière de rayon R.

[1] **Thm 19 :** $f :]-R;R[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 (et même C^∞) et $\forall x \in]-R;R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

App 20 : Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Alors $(e^x)' = e^x$.

Ex 21 : $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

Cor 22 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

B] Lien avec les sommes de Taylor

Rem 23 : Nous venons de voir qu'une série entière est égale à sa somme de Taylor.

[1] **Def 24 :** Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{C}$ C^∞. On dit que f est développable en série entière en 0 si il existe $\alpha > 0$ tel que la suite (R_n) définie par $\forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge simplement vers 0.

Prop 25 : Si tel est le cas, $(\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k)$ a un rayon de convergence supérieur à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha;\alpha[$.

Rem 26 : La série de Taylor peut avoir un rayon de convergence non nul et sa somme distincte de f. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ [1]

Ex 27 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ & $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Prop 28 : Soit $\forall x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$ qu'on a développé en série entière. Alors $\forall x \in]-R;R[$, $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Ex 29 : $\forall x \in]-1;1[$, $\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ [1]

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

C] Analyticité

Def 30 : Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable.

Ex 31 : Les séries entières sont des fonctions holomorphes, qu'on peut dériver sous le signe somme.

Def 32 : $f : U \to \mathbb{C}$ est dite développable en séries entières en $z_0 \in U$ s'il existe un disque $D(z_0,R) \subset U$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall z \in D(z_0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0} a_n (z-z_0)^n$. f est dite analytique si elle est développable en séries entières en chaque point de U. [2]

Thm 33 : f est holomorphe si et seulement si elle est analytique.

Thm 34 : (Principe des zéros isolés) L'ensemble des zéros d'une série entière non nulle est isolé.

Thm 35 : (Formules de Cauchy) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour $z \in D(z_0,R) \subset U$. Soit $r \in]0;R[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int}\,dt$$

[2] **Cor 36 :** (inégalités de Cauchy) Si $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \le \frac{M(r)}{r^n}$

App 37 : (Théorème de Liouville) Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

App 38 : Tout polynôme non constant admet une racine.

Thm 39 : (Formule de Parseval) Sous les mêmes hypothèses que 35, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2 dt$

III) Problèmes au bord

[2] **Rem 40 :** On ne peut en général pas prévoir le comportement d'une série entière au bord : $(\sum x^n)$ diverge au bord du disque de convergence, $(\sum (-1)^n \frac{x^n}{n})$ converge pour $x = 1$.

On se propose d'étudier ceci pour $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Soit $\Gamma = \mathcal{C}(0,1)$.

Def 41 : $a \in \Gamma$ est dit régulier si f admet un prolongement analytique au voisinage de a. Il est dit singulier sinon. On note A_r (resp. A_s) l'ensemble des points réguliers (resp. singuliers).

Prop 42 : A_r est ouvert dans Γ (et donc A_s est fermé)

Ex 43 : Si $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $A_r = \Gamma \setminus \{1\}$ et $A_s = \{1\}$.

Thm 44 : $A_s \neq \emptyset$

Thm 45 : (des lacunes d'Hadamard) Soit (λ_n) une suite croissante d'entiers telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$ et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$ de rayon 1. Alors $A_r = \emptyset$.

Ex 46 : La série $(\sum n z^{2^n})$ est de rayon 1 mais n'admet aucun prolongement analytique sur le bord.

Examinons à présent le comportement au bord par passage à la limite.

Thm 47 : (DEV 1) (d'Abel angulaire) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon au moins 1. On suppose que $(\sum a_n)$ converge. Soit $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$. On pose $\Delta_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta} \in D(0,1) \mid \rho > 0, \theta \in [-\theta_0; \theta_0]\}$. On a alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ [1]

Thm 48 : (Taubérien faible) Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ et si $\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{x \to 1^-} f(x) = S$ alors $(\sum a_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

IV) Quelques applications des séries entières

A] Dans le calcul de somme

On peut ramener le calcul d'une somme au calcul d'une série entière et reconnaître un développement en série entière connu. [1]

Ex 49 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

On peut aussi déduire des sommes par passage à la limite au bord et utiliser le théorème d'Abel par exemple.

Ex 50 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Ex 51 : $\forall t \in]0; 2\pi[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ [2]

B] Développement en série entière via les équations différentielles

On peut trouver le développement en série entière d'une fonction via la connaissance d'une équation différentielle dont elle est solution.

Ex 52 : $\forall x \in [0; 1[, f(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$ vérifie $2x(1-x)f'(x) + (1-2x)f(x) = 1$. En injectant un DSE dans cette égalité on trouve $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$ [1]

Ex 53 : (DEV 2) (Équation de Bessel) Il existe une unique solution DSE en 0 et valant 1 en 0 de (E) $xy'' + y' + xy = 0$, qui est $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$ [3]

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Éléments d'analyse, Queffélec, Zuily [2]
- Analyse 2, Francinou [3]