245 — Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue.

I] Fonctions holomorphes

A] Définitions

[Z]

Déf 1 : f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si la quantité $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$.

f est dite holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω et si f' est continue. On dit entière si $\Omega = \mathbb{C}$.

Ex 2 : Toute fonction polynomiale est entière.

Rem 3 : Comme dans le cas réel, on retrouve les formules donnant la dérivée d'une somme, d'un produit d'une composition ou de l'inverse.

Prop 4 : f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si $\exists\, l \in \mathbb{C} \,/\, \forall h \in \mathbb{C}, a+h \in \Omega \Rightarrow f(a+h) = f(a) + hl + o(|h|)$ et dans ce cas $l = f'(a)$.

Rem 5 : Si f est holomorphe sur Ω, $f_{|\Omega \cap \mathbb{R}}$ est dérivable (au sens réel) et coïncide avec la dérivée au sens complexe.

B] Holomorphie et différentiabilité

Par la suite, nous identifierons $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $f : \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+iy \in \Omega\} \to \mathbb{C}$, $(x;y) \mapsto f(x+iy)$ en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

[Z]

Thm 6 : f est holomorphe si et seulement si f est C^1 et satisfait les équations de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$.

Ex 7 : $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

[Z]

Rem 8 : Si $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$, Cauchy-Riemann devient $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Déf 9 : On définit les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Cor 10 : Si f est holomorphe sur Ω, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.

Prop 11 : Si f est holomorphe avec $f' = 0$ et que Ω est connexe alors f est constante.

On notera par la suite $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Prop 12 : Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ alors $df(a)$ est une similitude directe.

Ex 13 : Si $f(z) = \bar{z}$, si $z = a+ib \in \mathbb{C}$ alors f est différentiable en z mais $df(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas la matrice d'une similitude directe.

C] Fonctions analytiques

[1]

Déf 14 : f est analytique si elle est développable en séries entières en tout point de Ω.

Ex 15 : Les séries entières sont analytiques dans leur disque de convergence.

Prop 16 : Si f est analytique, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Thm 17 : (Principe du prolongement analytique) On suppose que Ω est connexe. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions analytiques coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation alors $f = g$.

Thm 18 : (Principe des zéros isolés) Si f est analytique sur Ω ouvert connexe et que $f \not\equiv 0$, alors l'ensemble
[1] des zéros de f est isolé.

Cor 19 : Dans ce cas, si $a \in \Omega$ est un zéro de f, il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, dans un voisinage de a dans Ω, $f(z) = (z-a)^k h(z)$ avec h analytique dans ce voisinage et $h(a) \neq 0$.

II) Formule de Cauchy et conséquences

A] Intégration sur un chemin

Def 20 : Un chemin de $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ C^1 par morceaux. On définit alors $\int_\gamma f = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ si f est continue sur $\mathrm{im}(\gamma)$.

Ex 21 : Si $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi$

Thm-def 22 : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un chemin et soit $z \in \mathbb{C} \setminus$
[1] $\mathrm{Im}(\gamma)$. On définit l'indice de z par rapport à γ par :
$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$. Alors $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{Z}$ et est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ et nulle sur la composante connexe non bornée.

Ex 23 : Si $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma(t) = a + re^{2i\pi t}$, $r>0$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus \mathcal{C}(a,r)$
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in D(a,r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rem 24 : Intuitivement, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est le nombre de fois que tourne γ autour de z.

B] Primitives et formule de Cauchy

[1] **Def 25 :** On dit que $F : \Omega \to \mathbb{C}$ est une primitive de f si $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F' = f$.

Ex 26 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ est une primitive de $z \mapsto z^n$

Thm 27 : f possède une primitive sur Ω si et seulement si $\int_\gamma f = 0$ pour tout lacet γ dans Ω (c'est-à-dire un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Ex 28 : $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

A partir de maintenant, Ω est supposé convexe.

Thm 29 : f possède une primitive sur Ω si et seulement si pour tout triangle Δ de Ω, $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

[1] **Thm 30 :** (de Cauchy-Goursat) Soient $\omega \in \Omega$ et f continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{\omega\}$. Alors pour tout triangle Δ de Ω, $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Cor 31 : Dans ce cas, f admet une primitive sur Ω.

Thm 32 : (Formule de Cauchy) Soient $z \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et γ un lacet de Ω avec $z \notin \mathrm{Im}(\gamma)$. Alors
$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

Cor 33 : Si γ est le cercle centré en l'origine de rayon r parcouru dans le sens direct, et si $|z| < r$ alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$

C] Conséquences de la formule de Cauchy

Thm 34 : f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est analytique sur Ω. En particulier, si $a \in \Omega$ et si $r > 0$ vérifie $D(a,r) \subset \Omega$, le rayon du déve-
[1] loppement en séries entières de f en a est supérieur à r.

Prop 35 : Si γ est un lacet de Ω tel que $a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\xi$

Cor 36 : Si $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, avec $r > 0$,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,e^{-int}\,dt$

Cor 37 : (inégalités de Cauchy) Avec les notations précédentes, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \mathcal{C}(a,r)} |f(z)|$

[1]

Cor 38 : (Théorème de Liouville) Toute fonction entière bornée est constante.

App 39 : (Théorème de d'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Cor 40 : (Principe du maximum) Soient $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tels que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constant. Alors $|f|$ n'admet pas de maximum local dans $D(a,R)$.

Thm 41 : (d'holomorphie) Soit X un espace mesuré et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ tel que :

[1]

1. $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L^1(X)$
2. $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe pour presque tout x
3. $\exists g \in L^1(X)$, $\forall z \in \Omega$, pour presque tout $x \in X$, $|f(z,x)| \leq g(x)$

Alors $F(z) := \int_X f(z,x)\,d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et $\forall z \in \Omega$, $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$

[3]

App 42 : (DEV 1) (densité des polynômes orthogonaux) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction poids telle que $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$. Alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

III) Fonctions méromorphes

A] Singularités

[1]

Def 43 : Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. On dit que a est une singularité effaçable pour f si f se prolonge en une fonction holomorphe en a.

[1]

Prop 44 : Si f est bornée au voisinage de a, alors a est une singularité effaçable.

Ex 45 : 0 est singularité effaçable de $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$.

Thm 46 : (de Casorati-Weierstrass) Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Alors f vérifie une seule des propriétés suivantes :

[1]

1. a est singularité effaçable.
2. $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ / $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z-a)^k}$ a une singularité effaçable en a. On dit alors que f a un pôle d'ordre m en a et on note $a_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$ le résidu de f en a.
3. $\forall r > 0$ / $D(a,r) \subset \Omega$, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. a est dite singularité essentielle.

B] Fonctions méromorphes

[1]

Def 47 : Une application méromorphe sur Ω est une application f telle qu'il existe $A \subset \Omega$ discret tel que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et que f admet un pôle en tout point de A.

Ex 48 : Soit $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$

Alors Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$

[1]

Thm 49 : (des résidus) Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $a_i \neq a_j$ dès que $i \neq j$, si Ω est convexe et si γ est un lacet de Ω tel que $\mathrm{im}(\gamma) \cap A = \emptyset$ alors $\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_i) \mathrm{Res}(f,a_i)$

Rem 50 : Ce théorème est très utile pour le calcul de certaines intégrales.

App 51 : (DEV 2) (Formule des compléments) $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

Références :

- Analyse complexe pour la licence, Tauvel [1]
- Analyse complexe, Matheron [2]
- Objectif agrégation, Beck [3]