246

Séries de Fourier. Exemples et applications.

Cadre : On travaille avec les espaces suivant :

- C l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodique muni de $\forall f \in C$, $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$
- Pour $p \in [1 ; +\infty[$, L^p l'ensemble des fonctions Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques tels que $\int_0^{2\pi} |f|^p d\lambda < +\infty$

On note $\forall f \in L^p$, $\|f\|_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt$

I) Séries trigonométriques, séries de Fourier

A] Polynômes et séries trigonométriques

[1] Def 1 : Soit : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{inx} \end{array}$. On appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur à $N \in \mathbb{N}$ toute fonction f de la forme $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \end{array}$ où $\forall n \in [\![-N ; N]\!]$, $c_n \in \mathbb{C}$.

[2] Prop-def 2 : L^2 est un espace de Hilbert muni de : $\forall f, g \in L^2$, $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

[1] Rem 3 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de L^2. Nous noterons par la suite $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$.

Prop 4 : Soient $N \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{P}_N$ de coefficients $(c_n) \in \mathbb{C}^{2N+1}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ où : $\forall n \in [\![1 ; N]\!]$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

[2] Rem 5 : $\forall n \in [\![-N ; N]\!]$, $c_n = \langle f, e_n \rangle$. Donc : $f = 0 \Leftrightarrow c_n = 0$ $\forall n \in [\![-N ; N]\!] \Leftrightarrow \forall n \in [\![1 ; N]\!]$, $a_n = b_n = a_0 = 0$.

[1] Def 6 : On appelle série trigonométrique toute suite de la forme $\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$.

Rem 7 : D'après la proposition 4, ceci est équivalent à se donner la suite $\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right)$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. [1]

On notera les séries trigonométriques $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \right)$.

Prop 8 : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| < +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{-n}| < +\infty$ alors la série $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

B] Séries de Fourier

Def 9 : Soient $f \in L^1$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le n-ème coefficient de Fourier de f par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ et sa série de Fourier par la série trigonométrique $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \right)$. Soit $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ sa N-ème somme partielle. [1]

Rem 10 : Si $f \in L^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f | e_n \rangle$. $S_N : \begin{array}{l} L^2 \to \mathcal{P}_N \\ f \mapsto S_N(f) \end{array}$ est donc la projection orthogonale de L^2 sur $\mathcal{P}_N$.

Prop 11 : Soient $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$. Alors $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$

Rem 12 : On peut aussi définir la série de Fourier dans le cas T-périodique, où $T > 1$. On a alors les relations : $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt$, $a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\frac{2\pi}{T} nt) dt$, $b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\frac{2\pi}{T} nt) dt$

Prop 13 : Si $f \in L^1$ est pair (resp. impair) presque partout, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$)

Ex 14 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi ; \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$. Alors $a_0(f) = \frac{4}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2 \pi^2}$ et $b_n(f) = 0$.

Prop 15 : Une série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ est égale à sa série de Fourier.

Lem 16 : (de Riemann-Lebesgue) $\forall f \in L^1$, $c_n(f) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0$

C] Quelques exemples fondamentaux

Def 17 : On appelle noyau de Dirichlet d'ordre $N \in \mathbb{N}$ le polynôme trigonométrique $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$. [2]

Thm 18 : $\forall N \in \mathbb{N}$, D_N est pair et vérifie $\|D_N\|_1 = 1$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $D_N(x) = \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.

Rem 19 : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in L^1, S_N(f) = f * D_N$.

Def 20 : On appelle noyau de Fejér d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$: $K_N = \dfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Prop 21 : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\|K_N\|_1 = 1$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $K_N(x) = \dfrac{1}{N} \left(\dfrac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \geq 0$.

Rem 22 : Si $\sigma_N(f)$ est la n-ème somme de Césaro de $(S_n(f))$ pour $f \in L^1$, alors $\sigma_N(f) = f * K_N$.

II) Convergence de la série de Fourier

On souhaite trouver des critères de convergence de la série de Fourier de $f \in L^1$ afin de reconstituer f, connaissant sa série de Fourier.

A] Convergence uniforme

Thm 23 : (DEV1) (de Fejér) [2]
- Si $f \in C$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
- Si $f \in L^p$, $p \in [1; +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

App 24 : $\forall f, g \in C$, $f = g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$

App 25 : (Théorème de Weierstrass trigonométrique) Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Cor 26 : Si $f \in C$ et que $(S_n(f))$ converge simplement, alors la limite simple est f. [2]

Le résultat suivant montre qu'on ne peut en général pas avoir de convergence uniforme de $(S_n(f))$:

Thm 27 : (DEV2) [3]
- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un G_δ dense D de $(C, \|\cdot\|_\infty)$ tel que : $\forall f \in D$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$
- Il existe un G_δ dense de $(C, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in \Delta$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$ est un G_δ dense de $\mathbb{R}$.

B] Convergence L^2, convergence normale

Thm 28 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2. [2]

Prop 29 : (inégalité de Bessel) Soit $f \in L^2$. Alors $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$, $\sum_{n=p}^{q} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$ [1]

Cor 30 : $\forall f \in L^2$, $\|f - S_n(f)\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On a en particulier la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$.

Cor 31 : L^2 est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z})$ via : [2]

$$\begin{aligned} L^2 &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (c_n(f)) \end{aligned}$$

Thm 32 : Si $f \in C$ et est C^1 par morceaux, alors $(S_n(f))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \lim_{n \to +\infty} S_n(f)$

Ex 33 : La fonction de l'exemple 14 étant C^1, elle coïncide en tout point avec sa série de Fourier. [1]

C] Convergence simple

Thm 34 : (de Dirichlet) Soient $f \in L^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que : [2]
- f admet une limite à droite, $f^+(x_0)$, et à gauche, $f^-(x_0)$, en x_0
- f admet une dérivée à droite et à gauche en x_0.

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f^+(x_0)+f^-(x_0)}{2}$

[2] <u>Cor 35</u> : Si f admet une limite et une dérivée à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, alors $(S_n(f))$ converge simplement vers $\frac{f^+ + f^-}{2}$.

<u>Rem 36</u> : On applique le plus souvent ce théorème dans le cas où $f \in C$ et est C^1 par morceaux. Dans ce cas, $(S_n(f))$ converge simplement vers f.

III) Applications des séries de Fourier

A] Calcul de sommes

Le théorème de Dirichlet nous permet d'avoir des égalités entre une fonction et une série, ou de calculer la somme d'une série convergente.

[1] <u>Ex 37</u> : Le théorème de Dirichlet appliqué à l'exemple 14 nous donne $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $1-\frac{\pi^2}{x^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$

Pour $x=\pi$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

<u>Ex 38</u> : Soient $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et f_α 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$. Son égalité avec sa série de Fourier donne $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\mathrm{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}$

La formule de Parseval nous permet d'établir d'autres égalités, en complément du théorème de Dirichlet.

[1] <u>Ex 39</u> : En appliquant Parseval à l'exemple 14, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

B] Formule sommatoire de Poisson

Dans le même registre, on peut aussi établir une égalité de somme liant f et sa transformée de Fourier $\hat{f}$:

[2] <u>Thm 40</u> : (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que $\exists M>0, \exists \alpha>1, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$
Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ où $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t x}dt$.

<u>App 41</u> : $\forall s>0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{n^2}{s}}$

C] Résolution d'équations différentielles

La connaissance des coefficients de Fourier peut nous permettre de trouver la solution d'une équation différentielle.

[3] <u>App 42</u> : (DEV 3) (Équation de la chaleur sur le cercle)
Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ admet une unique solution $u :]0;+\infty[\times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

<u>Références</u> :

- Analyse, Gourdon [1]
- Éléments d'analyse, Queffélec et Zuily [2]
- Analyse pour l'agreg, Bernis [3]
- Calcul intégral, Candelpergher [4]