250

Transformation de Fourier. Applications.

I] Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

A] Définitions et propriétés

[1] **Def 1:** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par : $\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$

Rem 2: Ceci a bien un sens puisque $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x)e^{-ixt} \in L^1(\mathbb{R})$.

Ex 3: Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)$, $\hat{f}(t) = 2\frac{\sin(t)}{t}$ si $t \neq 0$, $\hat{f}(0) = 2$.

[2] **Prop 4:** Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$,

- $\widehat{f(x)e^{ix\alpha}}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
- $\widehat{f(x-\alpha)}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$
- $\widehat{\overline{f(-x)}}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$

Thm 5: $\hat{f}$ est continue bornée avec : $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Cor 6: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow (C^0_b, \|\cdot\|_\infty)$, $f \longmapsto \hat{f}$ est linéaire continue.

[2] **Lem 7:** (de Riemann-Lebesgue) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \hat{f}(t) = 0$.

Prop 8: Si $x \longmapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est C^1 et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(t) = -i\,\widehat{xf(x)}(t)$

[1] **App 9:** Soit $f(x) = e^{-x^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$

B] Produit de convolution

[4] **Def 10:** Soient f et g deux fonctions mesurables. On définit leur produit de convolution par $f*g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x) g(x)$ là où c'est défini.

Prop 12: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f*g$ est définie presque partout et $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. [4]

[2] **Prop 13:** $\forall (f;g) \in L^1(\mathbb{R})^2$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

Rem 14: La transformation de Fourier transforme alors le produit de convolution en produit naturel. Ceci peut être pratique pour résoudre certaines équations fonctionnelles.

App 15: $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f*f = f \Rightarrow f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

C] Formule d'inversion de Fourier

[2] **Lem 16:** Soient $\lambda > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = e^{-|t|}$. Soit $h_\lambda(t) = \widehat{H(\lambda x)}(t)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(t) = \frac{2\lambda}{t^2+\lambda^2}$.

Prop 17: $(\frac{1}{2\pi}h_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une approximation de l'unité quand $\lambda \to 0$.

Cor 18: Si $g \in L^\infty$ est continue alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g * h_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 2\pi g(x)$

Cor 19: $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|f * h_\lambda - 2\pi f\|_1 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$

Thm 20: (Formule d'inversion de Fourier) Soit $f \in L^1$ tel que $\hat{f} \in L^1$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-t)$ presque partout.

App 21: $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.

App 22: $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'élément neutre pour le produit de convolution.

II) Extension de la transformation de Fourier

A] Théorème de Fourier-Plancherel

Rem 23: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas a priori définir $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ à partir de sa formule explicite. Cependant, $L^2(\mathbb{R})$ étant un espace de Banach et $\mathcal{F}$ étant définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut espérer trouver un prolongement de $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Lem 24: $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Thm 25: (de Fourier-Plancherel) Il existe une unique isométrie $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à un facteur près.

Cor 26: Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, soit $\forall A > 0$, $\varphi_A(t) = \widehat{f\,\mathbb{1}_{[-A;A]}}(t)$ et $\psi_A(t) = \widehat{\mathcal{F}(f)}(-t)$. Alors $\|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ et $\|\psi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$

Cor 27: Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(t)\, e^{ixt}\, dt$ presque partout.

Rem 28: $\mathcal{F}$ est uniquement défini par passage à la limite dans $L^2(\mathbb{R})$: nous n'avons pas d'expression explicite comme sur $L^1(\mathbb{R})$.

B] Espace de Schwartz

Prop-def 29: Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. On dit que f est à décroissance rapide si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes équivalentes:

- $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < +\infty$
- $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\lim_{|x| \to +\infty} |x^k f^{(l)}(x)| = 0$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles applications. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est appelé espace de Schwartz.

Ex 30: $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Prop 31: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme.

Thm 32: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cor 33: $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et sa réciproque est donnée par la formule d'inversion.

Rem 34: On aurait pu démontrer la formule d'inversion sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indépendamment de Thm 20, en utilisant Ex 30.

Thm 35: (Formule d'échange) $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x)\,dx$

Cor 36: $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\,dx$

Rem 37: On en déduit la formule de Parseval, déjà vu au Lem 24 : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2$.

C] Distributions tempérées

Def 38: Soit $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ linéaire. T est continue si $\exists k, l \in \mathbb{N}^2$, $\exists C > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $|T(\varphi)| \le C \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le l}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|$

On dit dans ce cas que T est une distribution tempérée. On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble de telles applications.

Prop-def 39: Soit $T \in \mathcal{S}'$. On définit alors des éléments de $\mathcal{S}'$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

- $T'(\varphi) = -T(\varphi')$
- $(xT)(\varphi) = T(x \mapsto x\varphi(x))$
- $\check{T}(\varphi) = T(x \mapsto \varphi(-x))$

[2] [1] [1] [3]

[3]

Prop 40 : On a une injection $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ via, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,dt$

Thm-def 41 : Soit $T \in \mathcal{S}'$. On définit la transformée de Fourier de T comme $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'$ définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(T)(\varphi) = T(\hat{\varphi})$.

Rem 42 : Ceci est légitime puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par $\mathcal{F}$.

Thm 43 : (Formule d'inversion) $\forall T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}\mathcal{F}T = 2\pi \check{T}$.

Cor 44 : $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}'$ dans lui-même.

Thm 45 : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(T_\varphi) = T_{\hat{\varphi}}$.

III) Applications de la transformation de Fourier

A] Polynômes orthogonaux de $L^2(I, \rho)$

[5]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Def 46 : On appelle fonction à poids toute fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. On note $L^2(I, \rho)$ l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable pour $\rho\, d\lambda$.

Prop 47 : $L(I, \rho)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(t)\overline{g(t)}\rho(t)\,dt$.

Prop-def 48 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$. (P_n) est appelé polynômes orthogonaux de ρ.

Ex 49 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, ces polynômes sont appelés polynômes de Hermite.

[5]

Thm 50 : (DEV 1) Si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$, alors cette famille induit une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

App 51 : Si (P_n) est la suite des polynômes de Hermite, $(x \longmapsto P_n(x)e^{-x^2/2})$ induit une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

B] Résolution d'équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle, on peut chercher une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier de la solution u, et en déduire u par formule d'inversion.

Thm 52 : (DEV 2) (Equation de Schrödinger) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\exists!\, u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant :

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = f(x)$
- $\forall T > 0$, $\forall k, l \geq 0$, $\sup_{|t|<T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < +\infty$

De plus, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi}\,d\xi$

C] Formule sommatoire de Poisson

[1]

Thm 53 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que $\exists M \geq 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2n\pi)$

App 54 : $\forall s > 0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{s}}$

Références :

- Eléments d'analyse, Queffélec-Zuily [1]
- Analyse réelle et complexe, Rudin [2]
- Eléments de distribution et EDP, Zuily [3]
- Théorie de l'intégration, Briane-Pagès [4]
- Objectif agrégation, Beck [5]