Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

265

# I] Fonction exponentielle, fonctions trigonométriques

## A] Fonction exponentielle

**Def 1:** On définit la fonction exponentielle par: [1]
$$\forall z\in\mathbb{C},\ e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Rem 2:** Ceci est bien défini car $\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)$ est de rayon $+\infty$.

**Prop 3:** $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\exp' = \exp$

**App 4:** $\exp_{|\mathbb{R}}$ est la solution du problème de Cauchy: $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

**Prop 5:** $\forall z,z'\in\mathbb{C}$, $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$

**Cor 6:** $\forall z\in\mathbb{C}$, $e^z\neq 0$ et $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$. En particulier, $|e^z|=1 \iff z\in i\mathbb{R}$.

**Thm 7:** $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ est surjective non injective.

**Thm 8:** $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. En particulier, [5] $\exp_{|\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est bijective, et convexe.

**Prop-def 9:** $t\mapsto e^{it}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. Son noyau est donc de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a>0$. On définit alors $\pi = \frac{a}{2}$. [1]

**Cor 10:** $\mathrm{Ker}\, \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$. En particulier, exp est $2i\pi$-périodique.

## B] Fonctions circulaires

**Def 11:** On définit les fonctions cosinus et sinus par: [1]
$$\forall z\in\mathbb{C},\ \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ;\ \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

**Rem 12:** Si $t\in\mathbb{R}$, $\cos(t)=\mathrm{Re}(e^{it})$, $\sin(t)=\mathrm{Im}(e^{it})$

**Prop 13:** cos et sin sont respectivement pair et impair. De plus, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ et cos et sin sont $2\pi$-périodiques. Enfin, $\cos^2+\sin^2=1$ [1]

**Prop 14:** $\frac{\pi}{2}$ est le plus petit réel $t>0$ tel que $\cos t=0$.

Ceci permet d'en déduire les variations de cos et de sin sur $\mathbb{R}$. En particulier:

**Cor-def 15:** $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ est bijective. On note Arccos sa réciproque.
$\sin : [-\pi;\pi] \to [-1;1]$ est bijective. On note Arcsin sa réciproque.

## C] Fonctions hyperboliques

**Def 16:** On définit les fonctions cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par: $\forall z\in\mathbb{C}$, [1]
$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}\ ;\ \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

**Rem 17:** On a les relations $\mathrm{ch}(z)=\cos(iz)$ et $\mathrm{sh}(z) = i\sin(z)$

**Prop 18:** ch et sh sont respectivement pair et impair. De plus, $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$, $\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$.

**Rem 19:** Sachant que $\mathrm{ch}>0$, on peut de même en déduire leur variation.

# II] Logarithme népérien, logarithme complexe

## A] Logarithme népérien

**Def 20:** On appelle logarithme népérien la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln = (\exp_{|\mathbb{R}})^{-1}$. [5]

**Prop 21:** $\forall x,y>0$, $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$

[5] **Thm 22 :** $\ln$ est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Rem 23 :** En particulier, $\forall x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

**Prop 24 :** $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ; $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\ln$ est concave.

[5] **Def 25 :** Soit $t > 0$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit alors $t^\alpha = \exp(\alpha \ln(t))$

**Rem 26 :** Cette définition coïncide avec la définition usuelle de $t^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

**Prop 27 :** Pour tout $t > 0$, $\alpha \longmapsto t^\alpha$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**Prop 28 :** Soit $\alpha > 0$. Alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

**App 29 :** Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $\operatorname{Re} \alpha > 0$, alors $x \longmapsto x^{\alpha - 1} e^{-x}$ est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

**App 30 :** $x \longmapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

## B] Détermination continue du logarithme

Le but est de trouver une façon de définir une fonction similaire à $\ln$, mais sur $\mathbb{C}$.

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}^*$.

[1] **Def 31 :** On appelle détermination continue de l'argument toute fonction continue $\theta : U \to \mathbb{R}$ telle que $\forall z \in U$, $e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}$.

**Ex 32 :** Soit $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On appelle détermination principale de l'argument l'application $\operatorname{Arg}$ de $\Omega_0$ dans $]-\pi ; \pi[$ vérifiant $e^{i \operatorname{Arg}(z)} = \frac{z}{|z|}$, $z \in \Omega_0$. Alors, en exprimant $\operatorname{Arg}$ en fonction de $\operatorname{Arccos}$ et $\operatorname{Arcsin}$, on voit que $\operatorname{Arg}$ est une détermination continue de l'argument sur $\Omega_0$.

**Def 33 :** On appelle détermination continue du logarithme sur $U$ toute fonction continue $l : U \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in U$, $\exp(l(z)) = z$. [1]

**Prop 34 :** Les déterminations continues du logarithme sur $U$ sont de la forme $z \longmapsto \ln|z| + i\theta(z)$ où $\theta$ est une détermination continue de l'argument sur $U$.

**Cor 35 :** Deux déterminations continues du logarithme sur $U$ diffèrent d'un élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.

**Cor 36 :** Il n'existe aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

**Thm 37 :** On suppose $U$ connexe. Toute détermination continue du logarithme est primitive de $z \longmapsto \frac{1}{z}$ sur $U$. [1] Réciproquement, si $z \longmapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur $U$, il existe une détermination continue du logarithme sur $U$.

**App 38 :** $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

**Thm-def 39 :** Soit $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$, $z \in \Omega_0$. Alors $\operatorname{Log}$ est une détermination continue du logarithme [1] appelée détermination principale du logarithme. De plus, $\operatorname{Log}_{|\mathbb{R}} = \ln$.

**App 40 :** (critère d'holomorphie pour les produits infinis) Soit $(f_n)$ une suite de fonctions holomorphes sur $U$. [3] On suppose que $(\sum (1 - f_n))$ converge normalement sur tout compact de $U$. Alors :

- La fonction $f = \prod_{n=0} f_n$ est bien définie et holomorphe sur $U$

• De plus, $f(z) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / f_n(z) = 0$ et si $f(z)=0$, sa multiplicité est la somme des multiplicités comme zéro des $f_n$ [3]

App 41 : Formule de Weierstrass (Voir Thm 48) [4]

# III) Etude de la fonction $\Gamma$ d'Euler

## A] Définition de $\Gamma$ et prolongement [4]

Def 42 : Soit $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. On définit la fonction $\Gamma$ d'Euler par : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Rem 43 : $\Gamma$ est bien définie sur $\Omega_0$ d'après App 29.

Prop 44 : $\forall z \in \Omega_0,\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Rem 45 : En itérant cette formule, on peut en déduire un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Cor 46 : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$

Lem 47 : Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la $n$-ème somme partielle de la série harmonique. Alors $\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln(n))$ existe et est finie. On note $\gamma$ sa limite appelée constante d'Euler.

Thm 48 : (DEV 1) $\Gamma$ est holomorphe sur $\Omega_0$. De plus, elle satisfait la formule de Weierstrass :

$$\forall z \in \Omega_0,\ \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

Rem 49 : Ceci permet de prolonger $\frac{1}{\Gamma}$ de façon analytique sur tous les complexes.

## B] Formule des compléments [3]

Thm 50 : (DEV 2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Rem 51 : Par principe du prolongement analytique, cette formule reste vrai sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ avec le prolongement méromorphe de $\Gamma$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

App 52 : Si $z \in \mathbb{C}$, $\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$

App 53 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## C] Tracé du graphe sur $\mathbb{R}_+^*$ [2]

Prop 54 : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^p t^{x-1} e^{-t}\, dt$

Cor 55 : $\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prop 56 : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$ et $\Gamma(x) \sim_0 \frac{1}{x}$

Ces informations permettent de dessiner l'allure de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Voir Fig 1).

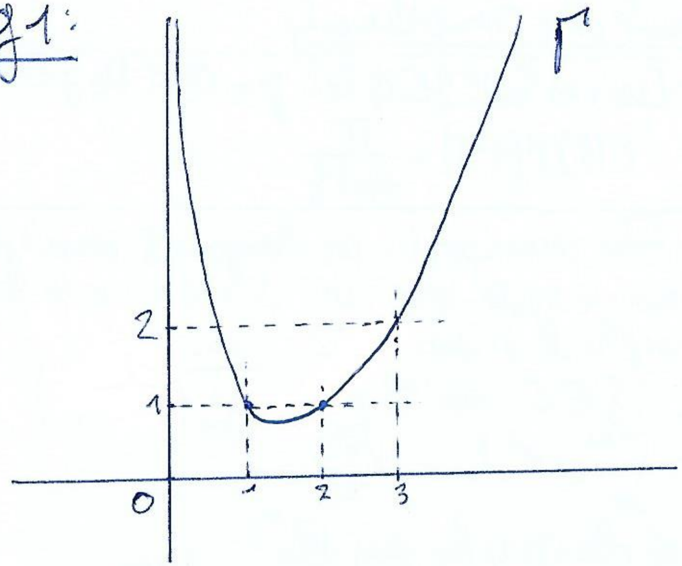
Rem 57 : On pourrait aussi dessiner l'allure de son prolongement méromorphe sur $\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}_-$ à l'aide de la proposition 44.

On a aussi son comportement asymptotique :

Thm 58 : (Formule de Stirling) [2]

$$\Gamma(t+1) \sim_{+\infty} t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$$

Fig 1 :




Références :


- Analyse complexe pour la licence, Tauvel [1]
- Analyse, Gourdon [2]
- Analyse complexe, Matheron-Amar [3]
- Eléments d'analyse, Queffélec-Zuily [4]
- Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités, Dantzer, [5]