267

Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

On note $I=[0;1]$.

I) Utilisation topologique des courbes

A] Connexité par arcs et connexité

Soit (E,d) un espace métrique.

[1]

<u>Def 1</u>: Un chemin entre x et y dans E est une application continue $\gamma:[0,1]\to E$ vérifiant $\gamma(0)=x$ et $\gamma(1)=y$.

<u>Ex 2</u>: Si E est un espace vectoriel normé, $t\mapsto(1-t)x+ty$ est un chemin entre $x,y\in E$.

<u>Def 2</u>: (E,d) est connexe par arcs si pour tout $(x;y)\in E^2$, il existe un chemin entre x et y dans E.

<u>Ex 3</u>: Les espaces vectoriels normés, et plus généralement convexes, sont connexes par arcs.

<u>Thm 4</u>: Si (E,d) est connexe par arcs, (E,d) est connexe.

<u>Rem 5</u>: Ceci donne une façon en général plus simple de prouver qu'un espace est connexe.

<u>Ex 6</u>: Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (par arcs)

<u>App 7</u>: L'exponentielle matricielle $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

<u>Ex 8</u>: L'ensemble des formes quadratiques réelles non dégénérées de signature $(p;q)$ est connexe.

B] Composantes connexes par arcs

[7]

<u>Prop-def 9</u>: La relation binaire: $\forall x,y\in E$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe un chemin entre x et y, est une relation d'équivalence. [1]

<u>Rem 10</u>: Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs. Elles ne coïncident pas toujours avec les composantes connexes. C'est le cas par exemple si ce sont des ouverts dans E muni d'une structure d'espace vectoriel normé. [7]

<u>Prop 11</u>: Si E est un espace vectoriel normé tel que $E=\bigsqcup_{j\in J}\omega_j$ avec ω_j ouvert et connexe par arcs alors les ω_j sont exactement les composantes connexes par arc.

<u>App 12</u>: Les composantes connexes par arcs, et donc connexes, des formes quadratiques réelles sont celles de mêmes signatures.

<u>Thm 13</u>: Soit $f:(E,d)\to(F,\delta)$ un homéomorphisme entre deux espaces métriques. Alors f échange les composantes connexes par arcs. [7]

<u>App 14</u>: $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

II) Chemins en analyse complexe

Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ ouvert.

A] Recherche de primitives

Soit $\gamma:[0;1]\to\Omega$ un chemin. A partir de maintenant, tous les chemins seront considérés différentiables. On parle alors de courbes lisses.

<u>Def 15</u>: Soit $f\in C^0(\Omega)$. On définit l'intégrale de f le long de γ par $\int_\gamma f(z)dz=\int_0^1 f\circ\gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt$ [2]

<u>Ex 16</u>: Si $\mathcal{C}(a,r)$, $a\in\mathbb{C}$, $r>0$, désigne le courbe paramétrée par: $\forall t\in[0,1]$, $\gamma(t)=a+re^{2i\pi t}$, alors $\int_{\mathcal{C}(0,1)}\frac{dz}{z}=2i\pi$

Def 17 : On dit que γ est un lacet si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Si $a \in \Omega$, on définit l'indice de γ par rapport à a comme :
$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{a-z}$$

Prop 18 : Si γ est un lacet, $\forall a \in \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$.

Rem 19 : L'indice correspond intuitivement au nombre de fois que tourne la courbe autour de a.

[2]

Thm 20 : f possède une primitive sur Ω si et seulement si pour tout lacet γ de Ω, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

App 21 : Il n'y a pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Thm 22 : Si Ω est convexe, f possède une primitive si et seulement si pour tout triangle $\Delta \subset U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

Thm 23 : (de Cauchy-Goursat) Si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{\omega\}$ pour un certain $\omega \in \Omega$ alors pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Cor 24 : Si Ω est convexe, que γ est un lacet et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $\forall z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ (Formule de Cauchy)

App 25 : Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique.

Cor 26 : Toute fonction entière bornée est constante.

App 27 : (Théorème de d'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}$ admet une racine.

B] Calcul d'intégrales

[2]

Def 28 : Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. a est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de f si il existe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ tels que $z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z-a)^k}$ se prolonge de façon holomorphe en a. a_1 est appelé résidu de f en a, noté $\mathrm{Res}(f,a)$

Thm 29 : (des résidus) Si Ω est convexe, que $a_1, \dots, a_m \in \Omega$ et que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_m\})$ admet un pôle en $a_1, \dots, a_m$ alors pour tout lacet γ de Ω tel que $\mathrm{Im}(\gamma) \cap \{a_1, \dots, a_m\} = \emptyset$, alors
$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f, a_k)$$

[2]

Rem 30 : Ceci donne un moyen très puissant de calculer des intégrales.

App 31 : (DEV 1) (Formule des compléments) Soit $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ la fonction Γ d'Euler. Alors, $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

III] Recherche de solutions d'équations différentielles

A] Méthode des caractéristiques

On s'intéresse ici à l'équation dites de transport :
$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ où } u_0 \in C^1(\mathbb{R}). \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Supposons dans un premier temps c constant.

[3]

Thm 32 : Si c est constant, la solution de (P) est donnée par : $u(x,t) = u_0(x - ct)$

Rem 33 : u est ainsi constante sur les courbes dites caractéristiques : $t \longmapsto (x + ct ; t)$ à x fixé. Connaissant u_0, ceci permet de dessiner u (Voir Fig 1). Cette idée se généralise dans le cas où c est non constant :

Meth 34 : On définit les courbes caractéristiques de (P) par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$C_\xi = \{(x(t);t), t\in\mathbb{R} \mid x'(t) = c(x(t);t), x(0)=\xi\}$. Si possible, on détermine ces courbes et on remarque que la solution u est constante sur ces courbes. Pour trouver $u(x,t)$, il suffit alors de trouver $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $(x;t) \in C_\xi$. Alors $u(x,t) = u_0(\xi)$.

[3]

<u>Ex 35</u> : Si $c(x;t) = \frac{x}{1+t^2}$, $C_\xi = \{x\exp(-\mathrm{Arctan}(t)) \mid t,x\in\mathbb{R}\}$ donc $u(x;t) = u_0(x\exp(-\mathrm{Arctan}(t)))$

<u>Ex 36</u> : Dans le cas $c(x;t) = x^2-1$, les solutions du problème de Cauchy ne sont pas toutes globales. On obtient une solution définie sur une partie $D \subsetneq \mathbb{R}^2$.

<u>Rem 37</u> : Lorsque la résolution du problème de Cauchy est difficile, on peut demander à un ordinateur de tracer les courbes caractéristiques. Connaissant u_0, on peut ainsi retrouver u graphiquement en suivant les courbes.

B] Cas d'un système autonome : le modèle de Lotka-Volterra

On considère un système autonome $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz où $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

<u>Def 38</u> : Une intégrale première du système est une application $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $t \mapsto H(Y(t))$ soit constante.

<u>Rem 39</u> : Avoir des informations sur les lignes de niveaux de H permet ainsi d'en avoir sur la solution maximale.

[6] <u>Ex 40</u> : On considère le modèle de Lotka Volterra : $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x_0, y_0 > 0 \end{cases}$ avec $a,b,c,d>0$. Alors $(x;y)\in\mathbb{R}_+^{*2} \longmapsto dx + by - c\ln(x) - a\ln(y)$ est une intégrale première du système.

<u>App 41</u> : (DEV 2) Les solutions maximales de ce système sont globales et périodiques. On peut ainsi en déduire leur allure (Voir Fig 2) [6]

IV] Utilisation en géométrie différentielle

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.

<u>Def 42</u> : On définit l'espace tangent de M en m noté $T_m(M)$ par : $T_m(M) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon>0, \exists \gamma :]-\varepsilon;\varepsilon[\to \mathbb{R}^n \ C^1$ avec $\gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[) \subset M, \gamma(0) = m, \gamma'(0) = v\}$

<u>Thm 43</u> : Pour tout $m \in M$, $T_m(M)$ est un espace vectoriel de dimension p.

<u>Cor 44</u> : Soient $m \in M$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant m et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$. Alors $T_m(M) = \mathrm{Ker}\, dg_m$. [4]

<u>Ex 45</u> : Si $M = \mathbb{S}^1$, $T_m(M) = m^\perp$.

<u>Rem 46</u> : Thm 43 donne une condition nécessaire pour qu'une partie soit une sous-variété.

<u>App 47</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

<u>App 48</u> : (Théorème des extrema liés) Soient U ouvert et $f, g_1, \dots, g_k : U \to \mathbb{R}$ C^1. Soit $M = \{\omega \in U \mid g_i(\omega) = 0 \ \forall i \in [\![1;k]\!]\}$. Si $f_{|M}$ admet un extremum local en $m \in M$, et que $\forall x \in M$, $(dg_{1,x}, \dots, dg_{k,x})$ est libre, alors $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $df_m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_{i,m}$. [5]

Fig1: $(c=1)$

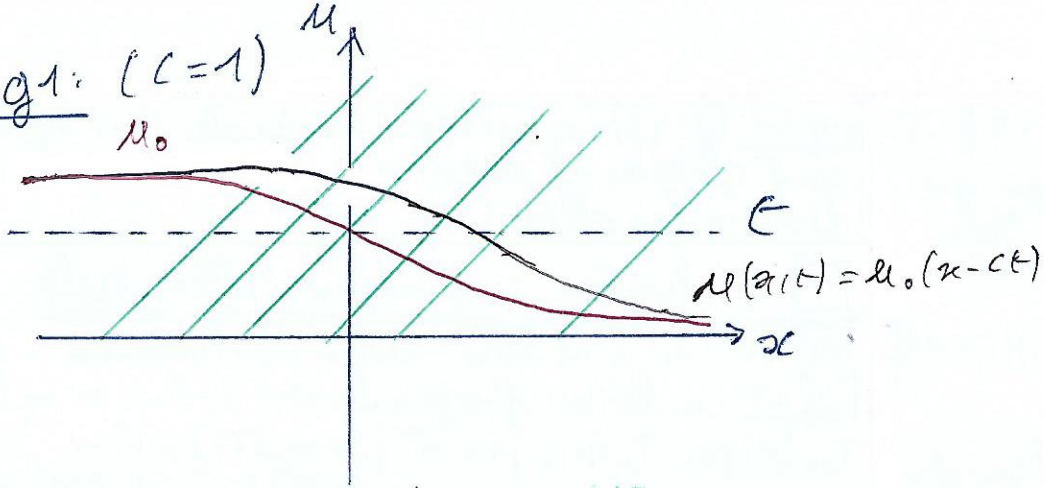
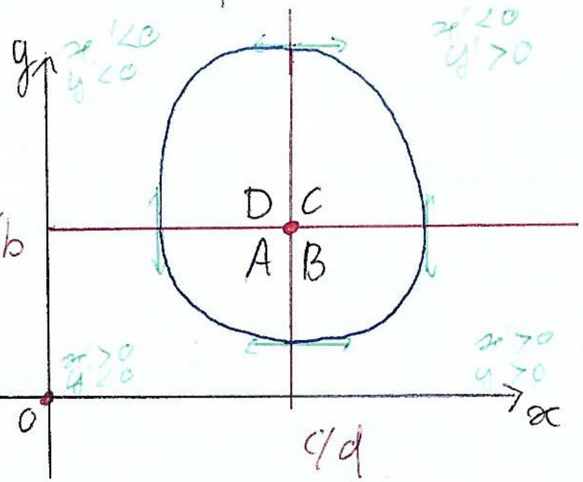


Fig2:



Références:

- Topologie, Queffélec [1]
- Analyse complexe pour la L3, Tauvel [2]
- Analyse numérique des EDP, Di Menza [3]
- Introduction aux sous-variétés, La Fontaine [4]
- Calcul différentiel, Avez. [5]
- Analyse 4, FGN [6]
- Analyse, Gourdon [7]