Système de Lotka-Volterra

Leçons concernées

- **220 :** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2.
- **228 :** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- **229 :** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- **267 :** Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Réference

- *FGN - Analyse 4*

Le but de ce développement est d'étudier un système particulier, qui est une façon de modéliser un système fermé de proies-prédateurs.
On peut par exemple noter $x(t)$ le nombre de sardines en fonction du temps, et $y(t)$ le nombre de requins. Les sardines sont donc les proies, les requins les prédateurs. On se questionne sur le lien entre x et y. On se donne un coefficient $a > 0$ de natalité/mortalité pour les sardines. On s'attend à ce que, dans le cas idéal, $x' = ax$. Cependant, il faut prendre en compte l'influence des requins, qui vont manger les sardines selon un certains coefficients $b > 0$. On s'attend alors à retirer bxy.
De même, en l'absence de sardines, si on suppose que les requins ne mangent que des sardines, on écrit $y' = -cy$ où $c > 0$. Mais la présence des sardines nous ajoute un dxy, $d > 0$.

Nous avons, en bref :

$$\left\{ \begin{array}{rr} x' = & ax - bxy \\ y' = & -cy + dxy \end{array} \right.$$

et on ajoute la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ où $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Ceci est un problème de Cauchy que nous noterons (E).

La résolution de ce système n'étant pas aisé, nous allons étudier qualitativement ce système et prédire sa trajectoire. Remarquons en particulier que ce système est un système autonome.

Théorème. *La solution maximale de (E) est globale et périodique. De plus, nous pouvons prédire l'allure de la courbe $t \mapsto (x(t); y(t))$.*

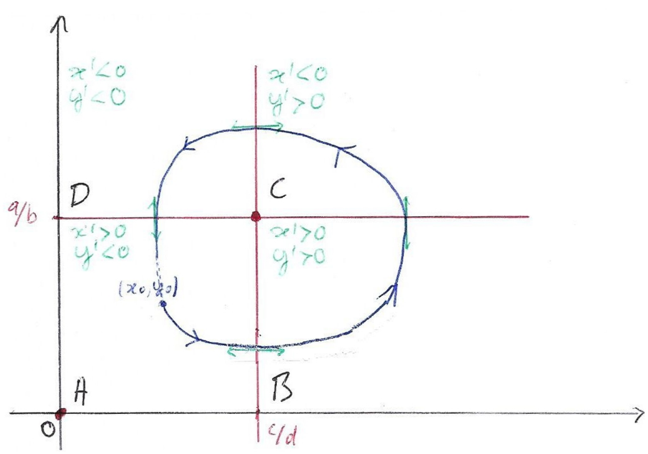
Tout d'abord, on écrit le système de la forme $(x', y') = F(x, y)$ où $F(x, y) = (ax - bxy; -cy + dxy)$ définit une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors l'existence et l'unicité de la solution maximale sur un intervalle $J =]T_*; T^*[$ de $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'en fait la solution est définie sur tout $\mathbb{R}$, nous allons chercher à appliquer le théorème d'explosion en temps finis.

Montrons que $x(t), y(t) > 0$ pour tout t. Si jamais il existe, par exemple, $t_1 \in J$ tel que $x(t_1) = 0$, alors, posons $\forall t \in \mathbb{R}, \widetilde{x}(t) = 0$ et $\widetilde{y}(t) = y(t_1)e^{-c(t-t_1)}$. Alors $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ est aussi solution du système, et coïncide avec (x, y) en t_1. Ainsi, par unicité, il faudrait alors que x soit identiquement nul, et donc en particulier $x_0 = 0$ ce qui est exclu. Donc $x > 0$. On montre de même que $y > 0$. Nous avons alors une minoration de x et y.

Pour appliquer le théorème d'explosion en temps fini, nous allons tout d'abord introduire une intégrale première du système. Soit $H(x, y) = dx + by - cln(x) - aln(y)$. Nous allons montrer que la trajectoire d'une solution du problème est incluse dans une ligne de niveaux de H. Ce faisant, avoir des informations sur cette courbe nous permet d'en avoir sur notre solution.

Un calcul direct montre en effet que $\dfrac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = 0$. H est alors constante sur la trajectoire des solutions. Considérons à présent les fonctions définies par $f(x) = dx - cln(x)$ et $g(x) = bx - aln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ces fonctions sont décroissantes, puis croissantes, et admettent alors un minimum qui sont respectivement $m = f(c/d)$ et $m' = g(a/b)$. On remarque que $H(x, y) = f(x) + g(y)$. Ce faisant, si on prends une solution maximale définie sur J, il existe une constante k telle que $\forall t \in J, f(x(t)) + g(y(t)) = k$. On a en particulier $f(x(t)) \leq k - m'$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall t \in J, \alpha \leq x(t) \leq \beta$. On démontre de même pour y. Ce faisant, d'après le théorème d'explosion en temps finis, la solution est globale.

Maintenant que nous savons que la solution maximale de (E) est globale, nous allons nous intéresser à l'allure de la trajectoire. Nous allons travailler dans le plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ puisque les coordonnées de notre solution sont strictement positives. Pour voir ce que nous devons démontrer, il est absolument nécessaire de faire un dessin. Cherchons tout d'abord les points d'équilibres du système, c'est-à-dire les points $(\alpha; \beta)$ tels que $F(\alpha; \beta) = 0$. On constate que la première coordonnée est nulle si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\beta = a/b$. La deuxième coordonnée est nulle si et seulement si $\alpha = c/d$ ou $\beta = 0$. Ceci nous définit alors quatre droites qui vont partager notre dessin en quatre. On constate en particulier que les seuls points d'équilibres du systèmes sont $(0; 0)$ et $(c/d; a/b)$. Sur notre dessin, nous allons représenter le comportement de x et y en fonction de la zone, puisque nous aurons alors une information sur leur dérivée :



Supposons que $(x_0; y_0)$ soit dans la zone A (sans perte de généralité). On remarque alors que la courbe va "tourner" autour du point d'équilibre $(c/d; a/b)$. C'est ce que nous allons démontrer. Nous écartons le cas où $(x_0; y_0) = (c/d; a/b)$, qui est trivial car ce point est un point d'équilibre du système, donc (x, y) serait constant égal à ce point. Nous écartons aussi le cas $x_0 = c/d$ ou $y_0 = a/b$ qui nous serons de toute façon amené à étudier lorsque nous verrons que la trajectoire change de zone.

Supposons alors par l'absurde que $(x(t); y(t))$ reste dans la zone A pour tout t. Dans cette zone, nous avons que x est croissante majorée (par c/d) et y est décroissante minorée par 0. On en déduit que lorsque $t \longrightarrow +\infty$, $(x(t), y(t))$ converge. Donc, nécessairement, sa limite doit être un point d'équilibre du système. Mais les seuls points d'équilibres sont $(0,0)$ et $(c/d, a/b)$. Comme x est croissant et que $x_0 > 0$, ce ne peut être le premier point. Cela ne peut pas être le deuxième non plus car y est décroissante et $y_0 < a/b$. C'est donc absurde. Donc la trajectoire fini par quitter la zone A, à partir d'un temps t_1 vérifiant, par continuité, $x(t_1) = c/d$ et $y(t_1) < a/b$. On a alors $y'(t_1) = 0$ et $x'(t_1) > 0$. Ainsi, dans un voisinage à droite de t_1, $x' > 0$ puisque x est C^1, et on rentre alors dans la zone B.

On démontre de la même façon que la trajectoire sort de la zone B vers la zone C, avec cependant la petite subtilité que, cette fois-ci, x n'est a priori plus majoré. Mais d'après ce que nous avons montré sur H pour la globalité, on a bien que x et y sont bornées, donc de même, la trajectoire passe de la zone B vers la C. De même, la trajectoire passe de la zone C vers la D, et de la D vers la A. Ceci permet de montrer que la trajectoire tourne effectivement autour du point d'équilibre $(c/d, a/b)$.

Reste à démontrer que la trajectoire est périodique. A priori, sur le dessin, rien nous assure que la trajectoire va revenir à son point initial. Nous allons nous intéresser à ce qui se passe sur la droite $x = c/d$. On remarque pour cela que $y \mapsto H(c/d, y)$ est une fonction strictement croissante sur $]a/b; +\infty[$. Mais, étant donné que notre trajectoire tourne, elle va intersecter une infinité de fois la demi-droite $x = c/d$, $y > a/b$. Ainsi, puisque H est constant le long de la trajectoire, cette dernière ne peut que revenir au même point sur cette demi-droite.

Soient alors t_1 et t_2 deux temps distincts pour lesquels la trajectoire passe par ce même point. Soit $T = t_2 - t_1$. On vérifie aisément que $t \mapsto (x(t+T); y(t+T))$ est encore solution du système (cela vient du fait que le système est autonome) qui coïncide avec (x, y) en t_1. Par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons alors $\forall t \in \mathbb{R}, x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$.

La trajectoire est ainsi périodique, ce qui achève l'étude qualitative de la solution. Nous pouvons alors préciser notre dessin précédent, et voir que la trajectoire forme, à homéomorphisme près, un cercle centré en $(c/d; a/b)$.

Remarques : On peut aller un peu plus loin, et calculer les valeurs moyennes de x et y. En effet, soit T la période de x et y. Alors, par périodicité, $\displaystyle\int_0^T \frac{x'}{x} = [ln(x(t))]_0^T = 0$. En remplaçant x' par $ax - bxy$, on trouve alors $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = a/b$. De même $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = c/d$. Ceci permet de voir que x et y oscillent effectivement autour des coordonnées du point d'équilibre $(c/d, a/b)$.

On peut aussi, grâce à ces données, modéliser l'influence de la pêche sur cette population. En effet, supposons que nous pêchons à un même taux ε les sardines et les requins. Ceci reviens à ajouter à la première équation $-\varepsilon x$ et à la deuxième $-\varepsilon y$. Les valeurs moyennes deviennent donc respectivement $\dfrac{c+\varepsilon}{d}$ et $\dfrac{a-\varepsilon}{b}$. La pêche favorise donc les sardines ! Ceci a pu notamment être observé expérimentalement ; durant la première guerre mondiale, la proportion de requins pêchés était plus élevée que la normale, ce qui peut paraître paradoxal car la pêche était réduite, à cause de la guerre. Volterra y apporta une explication à l'aide de cette modélisation. En particulier on voit effectivement que lorsque ε diminue, on favorise les requins, ce qui explique ce phénomène.