Méthode de Newton

Leçons concernées

* **223 :** Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
* **226 :** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence un+1=f(un). Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
* **228 :** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Réference

* *Rouvière - Petit guide du calcul différentiel*

Nous allons nous intéresser à la convergence de la méthode de Newton. On se donne pour cela une fonction $f : [c; d] \longrightarrow \mathbb{R}$ De classe C^2, strictement croissante avec $f(c)f(d) < 0$. Il existe alors un unique $a \in [c; d]$ tel que $f(a) = 0$. Nous définissons par récurrence la suite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & \in & [c; d] \\ x_{n+1} & = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{array}\right.$$

Théorème. *Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $x_0 \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$, alors la suite x converge vers a de façon quadratique.*

Si de plus $f'' > 0$, alors la suite converge quel que soit x_0 dans $[c; d]$ vers a et, si elle n'est pas stationnaire, alors on a l'équivalent $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - a \sim \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Démonstration. Tout d'abord, posons $\forall x \in [c; d], \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, la fonction que nous allons itérer et qui définie alors la suite x. La raison de cette fonction vient du fait que, si on connaît x_n, on remplace f par son développement limité en x_n dans l'équation $f(x) = 0$, on obtient : $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$ soit $x = \phi(x_n)$ et ces égalités tendent à espérer qu'on ait $f(x) \simeq 0$. On pose alors $x_{n+1} = \phi(x_n)$, et on itère.

Pour étudier cependant cette suite, nous devons nous assurer d'avoir un intervalle stable. A ce titre, nous allons chercher un intervalle stable centré en a. Pour $x \in [c; d]$, on calcule alors :

$$\phi(x) - a = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}$$

en remarquant que $f(a) = 0$. En écrivant ceci, on a furieusement envie d'appliquer une formule de Taylor au numérateur. f étant de classe C^2, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe c_x entre a et x tel que $\phi(x) - a = \dfrac{f''(c_x)}{2f'(x)}(x - a)^2$.

Posons alors $M = \dfrac{\max f''}{2\min f'}$ qui est bien définie puisque nous avons supposé que $f' > 0$ (en particulier, puisque nous travaillons avec une fonction C^2 sur un compact, cela a bien un sens de parler de max et de min).
Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $M\varepsilon < 1$. Alors, si $x \in I = [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$, nous avons $|\phi(x) - a| < |x-a| \leq \varepsilon$.

I est alors un intervalle stable, et si $x_0 \in I$, on a $|x_{n+1} - a| \leq M|x_n - a|^2$ pour tout n. Si on prouve la convergence, cette inégalité permet de voir que la convergence est quadratique. Pour voir la convergence, on multiplie l'inégalité par M : $M|x_{n+1} - a| \leq (M|x_n - a|)^2$. Cette inégalité permet alors de voir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq M^{2^n - 1}|x_0 - a|^{2^n} = \frac{1}{M}(M\varepsilon)^{2^n}$$

et ce dernier terme tends vers 0 par définition de $\varepsilon > 0$, d'où le résultat annoncé.

Supposons maintenant $f'' > 0$ (f strictement convexe). On prends alors $x_0 \in [c; d]$. On va, sans nuire à la généralité, supposer $x_0 > a$, la preuve étant analogue dans le cas opposé. Montrons que $[a; d]$ est un intervalle stable par ϕ : pour $x \in [a; d]$, on a

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \leq d$$
$$\phi(x) - a = \frac{f''(c_x)}{2f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$$

en conservant les notations précédentes. On en déduit que cette fois-ci, $[a; d]$ est un intervalle stable, et on a encore l'inégalité $|x_{n+1} - a| \leq M|x_n - a|^2$.

Montrons que x est décroissante (motivé par un dessin rapide éventuellement) : $x_{n+1} - x_n = \phi(x_n) - x_n \leq 0$ d'après l'inégalité précédente. On en déduit que la suite x est décroissante, et minorée par a, donc convergente. La limite éventuelle ne pouvant qu'être un zéro de f, la limite est forcément a.

Montrons maintenant le calcul d'équivalent, qui est une estimation un peu plus forte de la vitesse. On remarque que si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} = a$, alors $\forall n \geq n_0, x_n = a$. On suppose alors que $x_n \neq a$ pour tout n. D'après Taylor-Lagrange, il existe $z_n \in [a; x_n]$ tel que $x_{n+1} - a = \dfrac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2$. Or, par encadrement, $z_n \longrightarrow a$ donc $\dfrac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \longrightarrow \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}$ car f est C^2 d'où l'équivalent, ce qui achève ce développement.

$\square$