Décomposition polaire

Leçons concernées

- ∗ **106 :** Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.
- ∗ **155 :** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- ∗ **158 :** Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- ∗ **160 :** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Le but de ce développement est de démontrer le théorème de décomposition polaire. Suivant le contexte, vous allez être peut-être amené à étudier la version complexe ou réelle. La preuve que j'ai rédigé est adaptée de sorte que vous aviez juste, au pire, à changer les notations pour retrouver exactement la même preuve dans le cas réel que dans le cas complexe ...

Je vais donc utiliser des notations spécifiques qui seront peut-être en contradiction avec les notations de certains livres. On notera alors $H_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et hermitiennes complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Plus généralement, je dirai que les éléments de ces ensembles (dans un cas comme dans l'autre) sont des matrices symétriques. On définit de même $H_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, et $H_n^{++}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

De la même manière, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M^* désignera l'adjoint (qui coïncide de toute façon avec la transposée dans le cas réel). On notera $U_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices orthogonales si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitaires si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est-à-dire les matrices M vérifiant $M^*M = I_n$.

Théorème. *Soit $\psi : H_n^{++}(\mathbb{K}) \times U_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ définie par $\psi((H,Q)) = HQ$. Alors cette application est un homéomorphisme.*

Démonstration. Montrons premièrement la surjectivité. Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Faisons brièvement une analyse : si $M = HQ$ avec H et Q comme dans l'énoncé, alors $MM^* = H^2$ car Q est orthogonale, et H symétrique. Nous allons donc, pour la synthèse, définir H comme étant la "racine carré" de MM^*.

Pour cela, MM^* est symétrique. Donc, par le théorème spectral, cette matrice est diagonalisable et en plus ses valeurs propres sont réelles. Plus précisément, puisque M est inversible, MM^* est définie positive, puisque $\forall X \in \mathbb{K}^n, X^*MM^*X = ||M^*X||^2$ et cette quantité est positive, et nulle si et seulement si $X = 0$. Ainsi, les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de MM^* sont strictement positives. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $MM^* = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^*$, donné par le théorème spectral. On définit alors $H = Pdiag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})P^*$. Alors une vérification directe permet de voir tout d'abord que $H^2 = MM^*$ et que $H \in H_n^{++}(\mathbb{K})$.

Reste à poser $Q = H^{-1}M$ et à vérifier que cette matrice est orthogonale : $QQ^* = H^{-1}MM^*H^{-*} = I_n$. Ainsi, $\psi((H,Q)) = M$ ce qui prouve la surjectivité.

Occupons nous maintenant de l'injectivité. On suppose qu'on a deux décompositions de M : $M = HQ = \widetilde{H}\widetilde{Q}$. On pose alors $N = H^{-1}\widetilde{H} = Q\widetilde{Q}^*$. Soit $S \in H_n^{++}(\mathbb{K})$ vérifiant $S^2 = \widetilde{H}$, qu'on peut retrouver comme précédemment. Définissons $\widetilde{N} = SH^{-1}S$. On a alors :

$$\widetilde{N} = SH^{-1}S = SH^{-1}\widetilde{H}S^{-1} = SNS^{-1}$$

Nous observons alors plusieurs choses. Tout d'abord, N et $\widetilde{N}$ sont semblables. Ensuite, $\widetilde{N}$ est congruente à H^{-1} qui est symétrique définie positive. On en déduit alors que $\widetilde{N}$ est elle aussi symétrique définie positive, et donc diagonalisable d'après le théorème spectral, avec des valeurs propres strictement positives. Donc, puisque cette matrice est semblable à N, cette dernière est elle aussi diagonalisable. Or, les valeurs propres de N ne peuvent être que des éléments de module 1. En effet, on a d'abord, d'après l'égalité $N = Q\widetilde{Q}^*$, que N est une matrice orthogonale. Soit $X \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{gathered} NX = \lambda X \\ \Rightarrow ||NX||^2 = |\lambda|^2||X^2 \\ \Rightarrow ||X||^2 = |\lambda|^2||X||^2 \text{ car } N \text{ est orthogonale} \\ \Rightarrow |\lambda| = 1 \end{gathered}$$

C'est donc une matrice diagonalisable ayant des valeurs propres dans $\mathbb{S}^1 \cap \mathbb{R}_+^* = \{1\}$. On en déduit que $N = I_n$ et donc l'injectivité.

Prouvons maintenant l'homéomorphisme. Tout d'abord, ψ est continue par continuité du produit matriciel. Réciproquement, soit (M_k) une suite de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers un élément $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Ecrivons pour tout k : $M_k = H_kQ_k$ leur décomposition polaire. (Q_k) est alors une suite de $U_n(\mathbb{K})$ qui est compact. En effet, c'est un fermé, en tant que réciproque de $\{1\}$ qui est fermé par l'application $M \longmapsto M^*M$ qui est continue. C'est de plus un borné, puisque la norme de Froebennius d'une matrice de $U_n(\mathbb{K})$ est égale à $\sqrt{n}$. Au final, on a bien un compact.

Puisqu'on a un compact, il existe une extractrice φ telle que $(Q_{\varphi(k)})$ converge vers $Q \in U_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $(H_{\varphi(k)})$ converge vers la matrice MQ^*, qui est alors un élément de $H_n^+(\mathbb{K})$ qui est fermé. Or, cette matrice est inversible. Donc, avec l'égalité $H_n^{++}(\mathbb{K}) = H_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$, on obtient $H = MQ^* \in H_n^{++}(\mathbb{K})$. Donc $\psi((H,Q)) = M$.

On vient alors de montrer que les valeurs d'adhérences de la suite (Q_k) ne peuvent être que la matrice Q de la décomposition polaire de M. Ainsi, on a une suite de $U_n(\mathbb{K})$, compact, qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Elle converge donc nécessairement vers Q la matrice orthogonale de la décomposition polaire de M. Ainsi, par le même raisonnement que précédemment, (H_k) converge aussi vers $H = MQ^*$. Ceci prouve alors la continuité de la réciproque, et achève ainsi le développement.

$\square$

Remarques : On a utilisé le fait que, dans un compact, toute suite ayant une seule valeur converge. Pour démontrer ceci, soit (u_n) une suite d'un espace métrique compact (K,d) ayant une seule valeur d'adhérence λ. On va supposer par l'absurde que (u_n) ne converge pas vers λ. Donc :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \geq 0, \exists N \geq n, |u_N - \lambda| > \varepsilon$$

On pose alors : $\varphi(0) = \min\{N \geq 0 \mid |u_N - \lambda| > \varepsilon\}$ et $\forall n \geq 0, \varphi(n) = \min\{N \geq \varphi(n-1)+1 \mid |u_N - \lambda| > \varepsilon\}$ qui est bien définie par hypothèse. Alors $(u_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de (u_n), qui vit dans le compact K. Elle admet alors une valeur d'adhérence, qui est en particulier la valeur d'adhérence de u, donc λ. Mais ceci n'est pas possible, car $\forall n \geq 0, |u_{\varphi(n)} - \lambda| > \varepsilon$ par construction. On a alors absurdité, et u converge ainsi vers λ.