

Détermination du nombre de racines d'un polynôme via une forme quadratique

Leçons concernées

- * **144** : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- * **171** : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- * **152** : Déterminant. Exemples et applications.
- * **159** : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- * **170** : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Référence

- * *Gantmacher - Théorie des matrices tome 2*

Le but de ce développement est de donner une façon de calculer le nombre de racines distinctes réelles, ou complexes, d'un polynôme en fonction du rang d'une certaine forme quadratique.

On se donne $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré n de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ de multiplicités m_1, \dots, m_q . On introduit alors les sommes de Newton associés à ce polynôme :

$$\forall i \in \mathbb{N}, s_i = \sum_{k=1}^q m_k \alpha_k^i$$

Remarquons que ces quantités sont réelles d'après le théorème de structure sur les polynômes symétriques, et le fait que P soit un polynôme réel.

Et on introduit la forme quadratique réelle S :

$$S(x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j} x_i x_j$$

Théorème. Soit (s, t) la signature de S . Le nombre de racines réelles distinctes de P est $s - t$, et celui de racines complexes distinctes est $s + t$.

Démonstration. On commence par remarquer que : $S(x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^q m_k \alpha_k^i \alpha_k^j x_i x_j = \sum_{k=1}^q m_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_k^i x_i \right)^2$. On

définit alors les formes linéaires $l_k(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_k^i x_i$. On a alors $S = \sum_{k=1}^q m_k l_k^2$.

Ceci décompose S en somme de carrés de formes linéaires, qui sont cependant a priori complexe. Nous allons donc réécrire autrement notre forme quadratique afin de faire apparaître une somme de carrés de formes linéaires, mais cette fois-ci réelles.

Pour $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$, si $\alpha_k \in \mathbb{R}$, l_k est une forme linéaire réelle. Si $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on écrit alors $l_k = u_k + iv_k$ où u_k et v_k sont des formes linéaires réelles.

On remarque alors que $\overline{\alpha_k}$ est aussi racine de P , de même multiplicité que α_k . Notons k' l'entier (distinct de k) tel que $\alpha_{k'} = \overline{\alpha_k}$ (donc $m_k = m_{k'}$). Dans la somme, nous verrons apparaître $m_k l_k^2 + m_{k'} l_{k'}^2 = m_k (l_k^2 + l_{k'}^2) = m_k (2u_k^2 - 2v_k^2)$. Notons J l'ensemble des k tels que $\alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $Im(\alpha_k) > 0$ (de sorte que le k' correspondant à nos précédentes notations ne soit pas dans cet ensemble si k y est déjà). Au final :

$$S(x) = \sum_{k=1, \alpha_k \in \mathbb{R}}^q m_k l_k^2 + 2 \sum_{k \in J} m_k u_k^2 - 2 \sum_{k \in J} m_k v_k^2$$

Nous avons alors écrits S comme somme de carrés de formes linéaires réelles. Mais pour avoir la signature, il faut encore assurer que la famille $(l_k)_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \cup (u_k, v_k)_{k \in J}$ soit libre. On peut prouver ceci en vérifiant si le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1}^{\alpha_j \in \mathbb{R}} & \overbrace{1}^{j \in J} & \overbrace{0}^{j \in J} \\ \alpha_j & \frac{\alpha_j + \overline{\alpha_j}}{2} & \frac{\alpha_j - \overline{\alpha_j}}{2i} \\ \alpha_j^2 & \frac{\alpha_j^2 + \overline{\alpha_j}^2}{2} & \frac{\alpha_j^2 - \overline{\alpha_j}^2}{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_j^{q-1} & \frac{\alpha_j^{q-1} + \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2} & \frac{\alpha_j^{q-1} - \overline{\alpha_j}^{q-1}}{2i} \end{pmatrix}$$

qui correspond à une matrice extraite de taille q de la matrice des vecteurs colonnes définissant chacune des formes linéaires, est non nul.

Notons (C_k) les colonnes de cette matrice. En utilisant la multilinéarité du déterminant, et son caractère alterné, le déterminant est inchangé si, pour $j \neq k$, on transforme C_k en $C_k + iC_j$ ou en $C_k - iC_j$. En particulier, on peut faire ces transformations aux colonnes C_k et $C_{k'}$ pour $k \in J$, et $k' \neq k$ tel que $Re(l_k) = Re(l_{k'})$. On obtient alors la matrice de Vandermonde de taille q associée aux α_i qui sont deux à deux distincts. Ce déterminant est donc non nul, et la famille est donc libre.

Nous pouvons ainsi en déduire des informations sur la signature de S . On remarque qu'une racine réelle contribue à $(1, 0)$ dans la signature, et qu'une racine complexe non réelle et son conjugué contribuent à $(1, 1)$. si r et c sont respectivement les nombres de racines réelles et les nombres de racines complexes distinctes, on a alors les égalités $s = r + c/2$ et $t = c/2$. Donc $s + t = r + c$ qui est bien le nombre de racines complexes distinctes, et $s - t = r$ qui est bien le nombre de racines réelles distinctes. \square

Exemple : Soit $P(X) = X^2 - bX + c$ de racines λ_1 et λ_2 . Alors :

$$\begin{aligned} s_0 &= 2 \\ s_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ s_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = b^2 - 2c \end{aligned}$$

Donc $S(x) = 2x_0^2 + 2bx_0x_1 + (b - 2c)x_1^2$. En utilisant la méthode de factorisation de Gauss, on aboutit à $S(x) = 2(x_0 + \frac{b}{2}x_1)^2 + \frac{b^2 - 4c}{2}x_1^2$

On en déduit alors que :

- la signature est $(1, 1)$ si $b^2 - 4c < 0$, ce qui donne aucune racine réelle, et deux racines complexes non réelles.
- la signature est $(1, 0)$ si $b^2 - 4c = 0$ ce qui donne une seule racine réelle double.
- la signature est $(2, 0)$ si $b^2 - 4c > 0$ ce qui donne deux racines réelles distinctes.

On retrouve alors ce qui est connu dans le cas du degré 2.

Remarques : Ce théorème est puissant puisqu'il nous permet de calculer le nombre de racines réelles ou complexes distinctes d'un polynôme sans même avoir accès à ses racines.

En effet, premièrement, il nous faut calculer la formule quadratique S pour nous calculer, donc les sommes de Newton. Les sommes de Newton sont des polynômes symétriques en les α_k , et nous pouvons alors trouver leur décomposition en fonction des polynômes symétriques élémentaires algorithmiquement. Connaissant les relations coefficients-racines si on se donne le polynôme, on peut ainsi calculer les sommes de Newton et donc S .

Une fois que nous avons S , il nous faut sa signature. On applique pour cela la méthode de Gauss pour avoir ce qu'on souhaite.