Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Leçons concernées

* **156 :** Exponentielle de matrices. Applications.
* **204 :** Connexité. Exemples et applications.
* **214 :** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Théorème. *L'application* $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Démonstration. La preuve de ce théorème va se dérouler en trois grandes étapes. Nous allons, pour $C \in GL_n(\mathbb{C})$, tout d'abord montrer que $exp_{|\mathbb{C}[C]} : \mathbb{C}[C] \longrightarrow \mathbb{C}[C]^\times$ est un morphisme de groupes. Nous montrerons ensuite que $\mathbb{C}[C]^\times$ est un espace connexe. Enfin, le théorème d'inversion locale nous permettra de conclure.

Etape 1 : Intéressons-nous à la restriction de l'exponentielle matricielle à l'algèbre des polynômes en C. Tout d'abord, nous avons l'égalité $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Le sens direct étant évident, prouvons le sens réciproque. Si M est un polynôme en C qui est inversible, soit $\chi_M(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ son polynôme caractéristique.
Puisque M est inversible, $a_0 \neq 0$ puisque 0 n'est pas valeur propre de M. Puisque le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous pouvons écrire l'égalité : $M \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \right) = I_n$. Donc nous avons $M^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \right) \in \mathbb{C}[C]$. En particulier, M est inversible dans l'anneau $\mathbb{C}[C]$, ce qui prouve l'égalité.

Ainsi, exp envoie bien $\mathbb{C}[C]$ dans $\mathbb{C}[C]^\times$, et c'est bien un morphisme de groupes puisque C commute avec tout polynôme en C. En particulier, tout polynôme en C commute avec tout polynôme en C, et on peut alors appliquer l'égalité $exp(A + B) = exp(A)exp(B)$ (vraie "uniquement" si A et B commutent !).
Le côté "morphisme de groupes" nous sera assez utile par la suite.

Etape 2 : On prouve maintenant que $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$. Le fait qu'il soit ouvert provient du fait que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour la connexité, nous allons en fait montrer que c'est un espace connexe par arcs. Soient alors M et N deux tels éléments. L'application $z \longmapsto det(zM + (1 - z)N)$ est non nulle, car elle vaut $det(N)$ et $det(M)$ en $z = 0$ et $z = 1$ qui sont non nuls puisque M et N sont inversibles. Cette application étant un polynôme non nul, il y a alors un nombre fini de racines. Puisque $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est encore connexe par arcs, on peut trouver un chemin $\gamma : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vaut 0 en 0 et 1 en 1, et qui évite les racines de ce polynôme.
On a alors un chemin $t \longmapsto \gamma(t)M + (1 - \gamma(t))N$ qui vie dans $\mathbb{C}[C]^\times$ entre M et N d'où la connexité par arcs.

Etape 3 : Nous allons maintenant utiliser précieusement cette information. Pour cela, nous allons montrer que $exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert fermé non vide de $\mathbb{C}[C]^\times$, ce qui montrera en fait l'égalité par connexité, et donc la surjectivité.

Pour montrer qu'il est ouvert, nous allons appliquer le théorème d'inversion locale. Un calcul direct nous donne que $d(exp)_0 = I_n$. En particulier, la différentielle est inversible en 0. Par théorème d'inversion locale, en considérant $exp : \mathbb{C}[C] \longrightarrow \mathbb{C}[C]$, il existe U et V deux ouverts de $\mathbb{C}[C]$ contenant respectivement 0 et I_n tels que $exp : U \longrightarrow V$ soit un C^1 difféomorphisme. En particulier, on a un voisinage ouvert de I_n dans $exp(\mathbb{C}[C])$.
On prends maintenant $M = exp(N) \in exp(\mathbb{C}[C])$ quelconque. Alors, d'après l'étape 1, $exp(N + U) = MV$ qui contient M puisque V contient l'identité. Donc on a trouvé un voisinage ouvert de M dans $exp(\mathbb{C}[C])$. Ainsi, cet ensemble est ouvert.

Pour le côté fermé, nous allons encore utiliser l'étape 1. Puisque $exp : \mathbb{C}[C] \longrightarrow \mathbb{C}[C]^\times$ est un morphisme de groupe, en particulier, $exp(\mathbb{C}[C])$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[C]^\times$. Quotientons ce dernier groupe par la relation de congruence à gauche modulo $exp(\mathbb{C}[C])$. Puisque les classes pour cette relation forment une partition, nous avons :

$$\mathbb{C}[C]^\times = \bigsqcup_{g\in\mathcal{R}} g.exp(\mathbb{C}[C])$$

où $\mathcal{R}$ forme une classe de représentants pour cette relation. Puisque cette union est disjointe, nous avons alors :

$$\mathbb{C}[C]^\times \setminus exp(\mathbb{C}[C]) = \bigsqcup_{g\in\mathcal{R}\setminus exp(\mathbb{C}[C])} g.exp(\mathbb{C}[C])$$

qui est une union d'ouverts d'après ce que nous avons démontré précédemment. En conséquence, $exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé.
Puisqu'il est non vide (il contient I_n, nous avons alors par connexité $exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^\times$. En particulier, C, qui appartient à ce dernier ensemble, admet un antécédent par exp ce qui prouve la surjectivité.

$\square$

Remarques :
- On a montré un résultat plus précis : toute matrice admet un antécédent qui est un polynôme en cette matrice.
- On peut se demander si le résultat est toujours vrai pour les matrices réelles. Malheureusement, le simple fait de s'intéresser à l'exponentielle réelle nous permet de voir que cela ne semble plus marcher. On peut malgré tout prouver le théorème suivant, grâce à ce que nous venons de faire :

Corollaire. *Si on considère $exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, alors $exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\right\}$*

Ainsi, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de l'exponentielle, puisque ce n'est le carré d'aucune matrice réelle (écrivez les relations que ça implique, et en essayant de résoudre on se rends compte que la matrice doit être nulle, ce qui n'est pas le cas).

Démonstration. Tout d'abord, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $exp(M) = exp(\frac{1}{2}M)^2$, d'où l'inclusion direct. Réciproquement, soit $M = N^2$ le carré d'une matrice réelle. A fortiori, N est une matrice complexe : donc il existe un polynôme complexe P tel que $N = exp(P(N))$ d'après notre premier cas. La conjugaison étant continue, et parce que N est réelle, nous avons $N = exp(\overline{P}(N))$. Puisque $P(N)$ et $\overline{P}(N)$ commutent, on a ainsi $M = exp(P(N)+\overline{P}(N))$ soit $M = exp(Re(P(N)))$ d'où l'égalité.

$\square$