Université de Lille

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département Mathématiques

Master mathématiques
Première année

Travaux Encadrés de Recherche

Présenté et soutenue par
VERSTRAETE Marvin

Théorie de Galois des revêtements

Encadré par
BORNE Niels

Remerciements

J'aimerais remercier tout d'abord M.Niels BORNE, mon encadrant de TER, qui m'a accompagné à l'étude de ce sujet sur lequel j'ai pris plaisir à travailler.

Je remercie aussi Mme.Léa BLANC-CENTI et de façon générale la direction du Master 1 de mathématiques m'ayant permis de faire ce projet très enrichissant, m'aidant à appréhender le milieu de la recherche.

Je souhaite également remercier M.Ivo DELL'AMBROGIO et M.Viêt-Anh NGUYÊN pour leur cours et TD très enrichissant de topologie algébrique m'ayant apporté un complément de contenu dans mon TER, et d'avoir répondu à mes questions liées de près ou de loin aux objets mathématiques étudiés dans ce mémoire.

Je remercie enfin Nicolas BERNIER pour sa relecture, son aide pour la mise en page et son avis sur la structure de mon TER.

Introduction

Durant sa courte vie, Evariste Galois étudia de près les équations polynomiales dont, à l'époque, on connaissait leur résolution jusqu'au degré 4. La résolution de telles équations pour des degrés supérieurs à 5 était cependant encore un grand obstacle à l'époque. La question était de savoir s'il était possible, comme pour les quatre premiers degrés, de trouver les formules explicites des solutions de telles équations. Ce fut Galois qui répondit à la question avec sa théorie éponyme établissant une correspondance bijective entre les extensions d'un corps et les sous-groupes du groupe de Galois associé à une telle extension.

Il se trouve que la théorie des revêtements admet un analogue à la théorie de Galois. Dans cette théorie, les revêtements d'espaces topologiques remplacent les extensions de corps, et les groupes fondamentaux remplacent les groupes de Galois. On y trouvera alors de même une correspondance bijective entre les sous-groupes du groupe fondamental de certains espaces topologiques munis de certaines hypothèses locales, et les revêtements associés à un tel espace.

Pour étudier la théorie de Galois des revêtements, un outil pratique nécessaire à l'étude sera le groupe fondamental d'un espace topologique pointé. Nous établirons des propriétés basiques, utiles et intéressantes de cet objet, comme par exemple le calcul du groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$, avant d'en voir une méthode de calcul non trivial à l'aide du théorème de Van Kampen exprimant le groupe fondamental en terme de produit libre. Ce faisant, nous poursuivrons à l'étude générale des revêtements d'espaces topologiques, que nous classifierons sous certaines hypothèses locales sur l'espace de base. Nous verrons enfin que, au même titre que la théorie de Galois des corps, la théorie de Galois des revêtements apporte son aide à l'algèbre avec une démonstration simple du théorème de Nielsen-Schreier affirmant que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Table des matières

Chapitre 1

Groupe fondamental

Pour l'étude que nous voulons faire de la théorie des revêtements, nous allons devoir étudier un groupe particulier qui est le groupe fondamental, aussi appelé groupe de Poincaré. Son étude n'est pas nécessaire à la théorie des revêtements, qui peut s'étudier de façon totalement indépendante. Cependant, son alliance avec le groupe fondamental nous permettra de démontrer des résultats très intéressants.

Dans toute cette partie, nous désignerons par I l'intervalle de $\mathbb{R}$: $[0;1]$. La raison de ce nom est que nous donnons en réalité une version "faible" de la définition d'un chemin, que nous voyons comme une application continue de I dans un espace topologique. Mais en réalité, nous pouvons prendre n'importe quel intervalle fermé borné, puisque tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à I. Dans ce document, nous travaillerons donc uniquement avec I, sachant que la plupart des propriétés que nous allons voir restent vraies si on change l'intervalle.

1.1 Homotopies et lacets

1.1.1 Homotopies de chemin

Une notion fondamentale pour l'étude du groupe de Poincaré est la notion d'homotopie de chemin. Avant de nous attarder à cette définition, nous allons définir les objets de base que nous utiliserons par la suite.

Définition 1.1.1. *Soit X un espace topologique.*
On appelle chemin de X toute application $\gamma : I \longrightarrow X$ continue. Dans le cas où $\gamma(0) = \gamma(1)$, on dit que γ est un lacet.

Cette définition nous donne une multitude d'exemples dans un espace topologique quelconque. Mais ce qui va nous intéresser plus particulièrement par la suite, ce seront les chemins qui relient deux points. Ce sont ces objets qui vont nous permettre de définir le groupe fondamental.

Ainsi, si x et y désignent des éléments de X, un *chemin de x vers y* sera un chemin γ de X tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Dans le cas particulier où $x = y$, on dit que γ est un *lacet basé en x.*

En particulier, par la suite, nous étudierons un type particulier d'espace topologique qui sont les espaces connexe par arcs. On dit qu'un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tout $(x; y) \in X^2$, il existe un chemin de X de x vers y. Puisqu'un chemin se doit d'être continue, on peut montrer aisément qu'un espace connexe par arcs est en particulier un espace connexe. La réciproque se révèle cependant fausse en général.

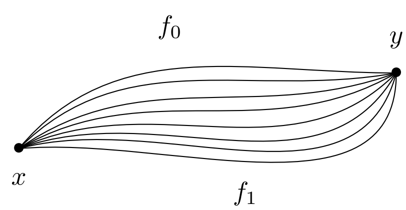
Ce qu'il nous faut à présent, c'est un moyen d'identifier plusieurs chemins entre eux. C'est pour cela qu'on définit la notion suivante :

Définition 1.1.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques.*
On appelle homotopie de X dans Y toute famille $(f_t)_{i\in I}$ de fonctions $f_t : X \longrightarrow Y$ telle que l'application, aussi appelée homotopie,

$$F : \left| \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x; t) & \longmapsto & f_t(x) \end{array} \right.$$

soit continue. On dit dans ce cas que f_0 est homotope à f_1.

Dans le cas particulier où les applications $t \longmapsto f_t(0)$ et $t \longmapsto f_t(1)$ sont constantes et que $\forall t \in I, f_t$ est un chemin, l'homotopie préserve les points de départ et d'arrivées des applications. On dit dans ce cas que $(f_t)_{t\in I}$ est une *homotopie de chemin* ou une *homotopie à extrémités fixées.*



La définition que nous avons donné de l'homotopie est la plus générale, puisqu'elle consiste non seulement à comparer de façon naturel des chemins comme sur le dessin ci-dessus, mais aussi à comparer deux applications quelconques d'un espace dans un autre. Nous nous intéressons par la suite essentiellement aux homotopies de chemin.

Remarquons qu'il est sous entendu dans cette proposition que se donner l'application F est équivalente à la donnée de la famille $(f_t)_{t\in I}$. Par la suite, nous allons couramment nous intéresser à la famille d'applications homotopes plutôt qu'à l'application F.

Proposition 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques.*
On définit une relation d'équivalence sur l'espace des fonctions continues par : $fRg \iff f$ homotope à g

Démonstration. Vérifions les axiomes d'une relation d'équivalence.

f est homotope à f via l'application : $\forall(x;t) \in X \times I, F(x;t) = f(x)$ qui est bien continue puisque f est continue. De plus, si fRg, il existe une homotopie F de $X \times I$ dans Y, de f à g. Alors $G(x;t) := F(x;1-t)$ définit trivialement une homotopie de g à f. Enfin, si fRg et gRh, d'homotopies respectives F et G, on définit :

$$\forall(x;t) \in X \times I, Z(x;t) = \begin{cases} F(x;2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x;2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Cette application est trivialement continue, puisque les deux définitions données coïncident en $t = 0.5$. Ceci définit donc bien une homotopie, entre f et h d'où fRh.

Cette relation ainsi définie est donc bien une relation d'équivalence.

□

Remarque 1.1.1. *Cette propriété est aussi vraie si nous considérons les homotopies de chemins. En effet, il suffit pour cela de supposer que les homotopies données par hypothèses dans la preuve sont des homotopies de chemin, et fixent donc les extrémités. Les nouvelles homotopies que nous définissons fixeront alors elles aussi les extrémités.*

Par la suite, pour f un chemin dans X, nous désignerons par $[f]$ sa classe d'équivalence pour la relation d'homotopie de chemin.

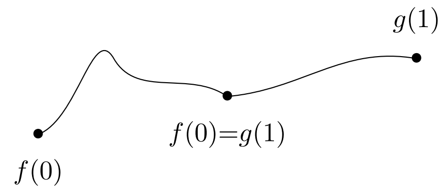
1.1.2 Définition du groupe fondamental

1.1.2.1 Concaténation de chemins et définition

Nous avons donné la définition d'un chemin, et même d'un lacet. Nous aimerions cependant, étant donné deux chemins qui coïncident en deux extrémités, pouvoir "recoller" ces chemins, c'est-à-dire définir un nouveau chemin dont l'image sera d'abord l'un, puis l'autre, toujours de façon continue.

Définition 1.1.3. *Soient X et Y deux espaces topologiques, et f et g deux chemins de X dans Y tels que $f(1) = g(0)$.*
On définit un nouveau chemin appelé concaténation de f et g de X dans Y, noté $f.g$ par :

$$\forall s \in I, f.g(s) = \begin{cases} f(2s) & si \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & si \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$



Comme le dessin nous le montre, nous constatons que la condition $f(0) = g(1)$ permet d'assurer que $f.g$ définie bien un chemin, c'est-à-dire, en particulier, une application continue.

Nous pouvons en particulier très bien définir $f.g$ dans le cas où f et g sont deux lacets basés au même point. Ceci nous donnes alors une ébauche de structure de groupe pour le groupe fondamental.

Définition 1.1.4. *Soit X un espace topologique et soit $x_0 \in X$.*
On appelle groupe fondamental (ou groupe de Poincaré) de X en x_0 l'ensemble :

$$\pi_1(X, x_0) = \{\ [f] \mid f \text{ lacet en } x_0\}$$

Remarquons à nouveau que nous considérons ici uniquement les homotopies de chemin, et donc à extrémités fixées. Ainsi, $\pi_1(X, x_0)$ est un ensemble d'ensemble de lacets basés en x_0.

On remarque, de plus, que cet ensemble est en fait un ensemble quotient. En effet, nous savons que la relation d'homotopie de chemins est une relation d'équivalence, par 1.1.1. Nous pouvons, en particulier, nous intéresser au sous-ensemble des lacets basés en x_0, puisque les lacets sont continues. Le groupe fondamental corresponds ainsi à cet ensemble quotienté par la relation d'équivalence d'homotopie de chemins.

Proposition 1.1.2. *Soient X un espace topologique et x_0 dans X.*
$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe, muni du produit : $[f].[g] = [f.g]$

Par la suite, nous désignerons par e_{x_0} le lacet constant égal à x_0. On s'autorisera à le noter e lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le point-base.

Démonstration. Avant de commencer la preuve, faisons la remarque suivante. Soient f un lacet basé en x_0 et $\phi : I \longrightarrow I$ une application continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Alors $[f] = [f \circ \phi]$.
En effet, on définit pour cela $\forall t \in I, \forall s \in I, f_t(s) = f(t\phi(s) + (1 - t)s)$. Ceci définit bien une homotopie de f à $f \circ \phi$, d'où l'affirmation. Les classes d'équivalences dans le groupe

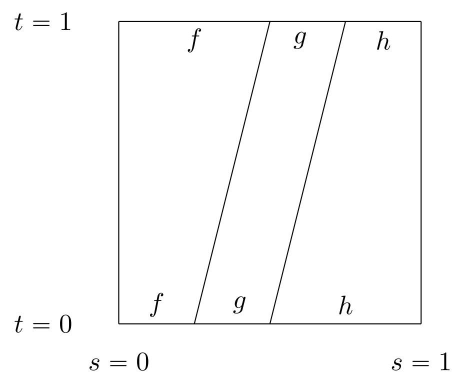
fondamental sont donc invariantes par reparamétrage.

Démontrons à présent la proposition.

- Vérifions que la loi définie précédemment est une loi interne pour le groupe fondamental.
  Soient $[f]$ et $[g]$ deux classes d'équivalence de lacets en x_0. Alors $f.g$ est bien définie, puisque $f(1) = x_0 = g(0)$, f et g étant des lacets en x_0. Il reste à présent à démontrer que le produit $[f].[g] = [f.g]$ a bien un sens. Soient pour cela deux lacets f' et g' en x_0 tels que $[f] = [f']$ et $[g] = [g']$. Alors il existe deux homotopies de chemin $(f_t)_{t \in I}$ et $(g_t)_{t \in I}$ liant f et f', et g et g'. En particulier, on a alors : $\forall t \in I, f_t(0) = f_t(1) = g_t(1) = g_t(0) = x_0$ puisque les homotopies sont de chemin et que f et g sont des lacets basés en x_0. Donc $(f_t.g_t)_{t \in I}$ est bien définie et désigne trivialement une homotopie entre $f.g$ et $f'.g'$. Le produit est donc bien définie.

- Montrons que cette loi est associative. Soient f, g et h trois lacets basés en x_0. Montrons que $[f].([g].[h]) = ([f].[g]).[h]$, c'est-à-dire $[f.(g.h)] = [(f.g).h]$.

  Pour ce faire, nous pouvons nous contenter du dessin suivant qui représente l'opération à faire :



  Ici, l'abscisse corresponds à la variable des chemins, l'ordonnée correspondant à l'étape de la transformation. Le carré est découpé en trois segments. Dans le premier domaine, l'homotopie s'exprima par le biais de f, dans le deuxième par le biais de g, et dans le troisième par le biais de h, de sorte qu'à t fixé, aux bords de chaque domaine, l'homotopie atteigne les mêmes extrémités que f, g ou h.

- Soit e l'application constante égale à x_0. Alors $[e] \in \pi_1(X, x_0)$. Vérifions que c'est bien l'élément neutre du groupe fondamental. Soit pour cela $[f] \in \pi_1(X, x_0))$. Alors, en posant :

$$\forall s \in I, \phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ 2s - 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

nous obtenons bien un paramétrage de f qui corresponds à $e.f$. Donc par la remarque au début de la démonstration, $[e.f] = [f]$. On a de même $[f.e] = [f]$ en inversant les deux lignes dans la définition de ϕ, et en changeant $2s - 1$ en $2s$.

- Si f est un lacet basé en x_0, soit $\forall s \in I, \overline{f}(s) = f(1-s)$. Montrons que nous avons alors définit un inverse pour $[\overline{f}]$. On définie alors la famille de chemins $(f_t)_{t \in I}$ par : $\forall t \in I$, f_t désigne la fonction identiquement égale à f sur $[0; 1-t]$ et constante égale à $f(1-t)$ sur $[1-t; 1]$. On pose alors $\forall t \in I, h_t = f_t.\overline{f_t}$. La famille $(h_t)_{t \in I}$ désigne alors une homotopie entre $f.\overline{f}$ et e, d'où $[f.\overline{f}] = [e]$. En appliquant le même raisonnement en changeant f par $\overline{f}$, on obtient $[\overline{f}.f] = [e]$. Ainsi, $[f]^{-1}$ existe et $[f]^{-1} = [\overline{f}]$.

Ceci montre alors que le groupe fondamental est bien un groupe pour ce produit.

□

1.1.2.2 Des premières méthodes de calcul

Maintenant que nous avons défini le groupe fondamental, observons quelques méthodes de calcul de ce groupe, connaissant le groupe fondamental de d'autres espaces.

On souhaite par exemple établir un lien entre deux groupes fondamentaux d'un même espace topologique, mais basés en deux points différents. La proposition suivante nous donne un isomorphisme dans un cas particulier :

Proposition 1.1.3. *Soient X un espace topologique connexe par arcs, et x_0 et x_1 deux éléments de X. Soit h un chemin entre x_0 et x_1. Alors :*

$$\beta_h : \left| \begin{array}{rcl} \pi_1(X, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ [f] & \longmapsto & [h.f.\overline{h}] \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupe.

Démonstration. Tout d'abord, l'application est bien définie. En effet, si f est homotope à f', par continuité de h, $h.f.\overline{h}$ est homotope à $h.f'.\overline{h}$. De plus, β_h est trivialement un isomorphisme de réciproque $\beta_{\overline{h}}$, ce qui établie la proposition.

□

Remarque 1.1.2. *Cette proposition nous permet alors de voir que si nous travaillons dans un espace connexe par arcs, le groupe fondamental ne dépends que de l'espace topologique, à isomorphisme près. Nous conviendrons alors de ne pas préciser le point de base pour ces espaces.*

Nous remarquons en particulier que l'isomorphisme n'est pas canonique, dans le sens où il dépends d'un chemin que nous avons prit entre x_0 et x_1. Un autre chemin entre ces deux points non homotope au précédent donnera alors un autre isomorphisme distinct.

Nous souhaitons à présent trouver un lien entre le groupe fondamental d'un produit, et le produit des groupes fondamentaux. La proposition suivante établit un isomorphisme très intéressant :

Proposition 1.1.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $(x_0; y_0) \in X \times Y$. Alors :*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0; y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Démonstration. Soit f un lacet basé en $(x_0; y_0)$. On peut alors écrire de façon unique, par propriété universelle de l'espace produit, $f = (g_f; h_f)$ où g_f et h_f sont des lacets basés respectivement en x_0 et y_0.

On peut alors définir l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \pi_1(X \times Y, (x_0; y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [f] & \longmapsto & ([g_f]; [h_f]) \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie par ce qui précède, et parce que toute homotopie de f définie aussi une homotopie de ses fonctions coordonnées. C'est de plus trivialement un morphisme de groupe, pour la loi du produit direct. Enfin, ceci nous donne bien une bijection. En effet, l'application est trivialement surjective. Elle est injective car deux homotopies des fonctions coordonnées induisent une homotopie du couple. Cette application est donc bien un isomorphisme de groupe.

□

1.1.3 Lien avec la simple connexité

Historiquement, le groupe fondamental a été introduit en partie dans le but de trouver une caractérisation pour qu'un espace soit simplement connexe, dont on donne la définition ci-dessous :

Définition 1.1.5. *Soit X un espace topologique. X est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et que tout chemin de même extrémités sont homotopes à extrémités fixées.*

Avant de poursuivre, attardons-nous sur l'exemple des espaces connexes par arcs. Avons-nous une caractérisation intéressante pour qu'un espace topologique soit connexe par arcs ? Une façon naturelle d'en trouver une est de définir une relation d'équivalence. Soit X un espace topologique. On définit la relation d'équivalence $\sim$ par : $x \sim y$ si il existe un chemin γ de X tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Il n'est pas difficile de voir que c'est bien une relation d'équivalence.

Dans ce cas, les classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes par arcs de X* et définissent ainsi une partition de X. Nous pouvons, comme nous l'avons fait avec le groupe fondamental, nous intéresser à l'ensemble quotient :

$$\pi_0(X) = \frac{X}{\sim}$$

Cet ensemble est donc l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Ceci étant dit, nous pouvons alors énoncer une propriété naturelle :

Proposition 1.1.5. *Soit X un espace topologique non vide.*

X est connexe par arcs si et seulement si $\pi_0 = \{X\}$.

Démonstration. Puisque $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, le sens réciproque est évident.
Pour le sens direct, supposons X connexe par arcs. Soit $x \in X$. Sa classe d'équivalence est bien sûr incluse dans X. Réciproquement, soit $y \in X$. Alors, puisque X est connexe par arcs, y est équivalent à x, et appartient donc à sa classe d'équivalence, d'où l'égalité. Nous venons donc de montrer qu'une classe d'équivalence quelconque est en fait égale à X, ce qui montre l'égalité.

□

Ainsi, la définition de π_0 nous donne une caractérisation de la connexité par arcs. Autrement dit, calculer $\pi_0(X)$, c'est voir si X est connexe par arcs ou non. Nous pouvons voir ainsi aisément que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, puisqu'il possède exactement deux composantes connexes, qui sont $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.

Revenons sur le groupe fondamental. On se rends compte qu'en fait il est, de la même façon que π_0, lié à une notion topologique qui est la simple connexité :

Proposition 1.1.6. *Soit X un espace topologique non vide.*

X est simplement connexe si et seulement si X est connexe par arcs et $\pi_1(X)$ est trivial.

Démonstration. Supposons X simplement connexe. Alors il est par définition connexe par arcs. Puisqu'il est connexe par arcs, prenons un élément quelconque $x \in X$. Par définition, tous les lacets basés en x sont homotopes entre eux. Le groupe fondamental de X (basé en x) est donc trivial.

Réciproquement, supposons X connexe par arcs et $\pi_1(X)$ trivial. Soient f et g deux chemins de X ayant même extrémités. Alors, en posant $x = f(0)$, $f.\bar{g}$ est un lacet basé en x, et est donc homotope au lacet constant égal à x, noté e_x, puisque le groupe fondamental de x est trivial. On a donc $[f.\bar{g}] = [e_x]$ soit, en multipliant par $[g]$, $[f.\bar{g}.g] = [e_x.g]$ et donc $[f] = [g]$. X est donc bien simplement connexe.

$\square$

Cette équivalence est fondamentale, puisqu'elle nous fournit un critère de non homéomorphisme. On sait que l'homéomorphisme transporte la connexité par arcs. Donc, par l'équivalence avec π_0, on montre sans difficultés que $\mathbb{R}^*$ n'est pas homémorphe à $\mathbb{R}$. De même, $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, puisque si on retire, de chaque côté, un point, retirer un point à $\mathbb{S}^1$ ne change pas sa connexité par arcs. Cependant, retirer un point à $\mathbb{R}$ rends l'ensemble non connexe par arcs. Par le même procédé, on montre ainsi que $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Mais comment montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes ? Ici, retirer un point ne change pas la connexité par arcs. Nous ne pouvons donc plus, a priori, utiliser le π_0 pour nous en sortir. En revanche, intuitivement, si nous retirons un point à $\mathbb{R}^2$, nous obtenons un ensemble qui n'est plus simplement connexe, puisque nous pouvons tourner autour du point retiré, et donc obtenir un lacet qui ne peut se contracter au lacet constant de façon continue. Mais faire ceci dans $\mathbb{R}^3$ ne change pas la simple connexité, puisque la troisième dimension nous permet de contourner le point retiré.

1.2 Le groupe fondamental du cercle

Cependant, cela ne fait que de déplacer le problème ; comment calculer le groupe fondamental ? Nous allons nous intéresser à un groupe fondamental qui nous permettra de démontrer divers résultats, et notamment de calculer d'autres groupes fondamentaux. Il s'agit de celui du cercle $\mathbb{S}^1$.

1.2.1 Lemmes préliminaires

Pour calculer ce groupe, nous allons tout d'abord passer par quelques petits lemmes.

Lemme 1.2.1. *Soit l'application :*

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ s & \longmapsto & (cos(2\pi s), sin(2\pi s)) \end{array} \right.$$

Alors il existe un recouvrement d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de $\mathbb{S}^1$ tel que $\forall \alpha \in I$, $p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{j \in I} V_j$ avec $(V_j)_{j \in I}$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints non vides, finie ou infinie, tels que $\forall j \in I, p_{|V_j} : V_j \longrightarrow U_\alpha$ soit un homéomorphisme.

Démonstration. La démonstration est directe en prenant deux arcs de cercle ouverts (pour la topologie induite de $\mathbb{R}^2$) non disjoints recouvrant le cercle.

$\square$

Ceci est un cas particulier de ce que nous appellerons plus tard un *revêtement*.

Lemme 1.2.2. *Soient Y un espace topologique et F une application continue de $Y \times I$ dans $\mathbb{S}^1$. On suppose qu'il existe $\widetilde{F}_0$ continue de $Y \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $p \circ \widetilde{F}_0 = F_{|Y \times \{0\}}$. Alors :*

$$\exists ! \widetilde{F} : Y \times I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \begin{cases} p \circ \widetilde{F} = F \\ \widetilde{F}_{|Y \times \{0\}} = \widetilde{F}_0 \end{cases}$$

$\widetilde{F}$ est appelé ici relèvement de F. Ce lemme nous donnera alors des conséquences fondamentales dans le cadre des relèvements d'homotopies, très utiles pour la théorie des revêtements, puisqu'il montre en particulier que si on relève une seule application de la famille, alors on peut relever toutes les autres, par une application qui prolonge de façon continue le premier relèvement.

En particulier, ce lemme est un cas particulier du théorème de relèvement des homotopies, que nous allons rappeler plus tard. Néanmoins, sa démonstration étant très similaire à celle que nous allons énoncer ici, nous nous contenterons de cette dernière.

Démonstration. Soit $y_0 \in Y$. Nous allons commencer par définir $\widetilde{F}$ sur $N \times I$ où N est un voisinage ouvert de y dans Y. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement d'ouvert de $\mathbb{S}^1$ donné par le lemme précédent. On sait que, par continuité de F, $\forall t \in I, \exists N_t \times]a_t; b_t[$ ouvert de $Y \times I$ contenant $(y_0; t)$, $\exists \alpha \in I$, $F(N_t \times]a_t; b_t[) \subset U_\alpha$. On obtient alors $(N_t \times]a_t; b_t[)_{t \in I}$ un recouvrement de $\{y_0\} \times I$ qui est compact. Par le lemme de Lebesgue, on peut donc en déduire une subdivision $(t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de I telle que $F(N_i \times [t_i; t_{i+1}]) \subset U_i$ un des U_α. On pose :

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$$

Alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $F(N \times [t_i; t_{i+1}]) \subset U_i$.

On construit par récurrence sur i l'application $\widetilde{F}$ sur $N \times [0; t_i]$. Pour $i = 0$, nous avons directement par hypothèse l'existence de cette application. Si on suppose à présent $\widetilde{F}$ construit sur $N \times [0; t_i]$, alors, puisque nous avons $F(N \times [t_i; t_{i+1}]) \subset U_i$, il existe $\widetilde{U_i} \subset \mathbb{R}$ un ouvert homéomorphe à U_i via p qui contient le point $\widetilde{F}(y_0; t_i)$ supposé construit par récurrence. Alors, quitte à diminuer N, on peut supposer $\widetilde{F}(N; t_i) \subset \widetilde{U_i}$. On définit alors $\widetilde{F}$ sur $N \times [t_i; t_{i+1}]$ par $p_{|U_i}^{-1} \circ F$ où $p_{|U_i}^{-1} : U_i \longrightarrow \widetilde{U_i}$. Ceci est bien définie, puisque $F(N \times [t_i; t_{i+1}]) \subset U_i$. De plus, cette définition de $\widetilde{F}$ est en accord avec la façon dont est définie $\widetilde{F}$ sur $N \times \{t_i\}$ puisque $\widetilde{F}(N; t_i) \subset \widetilde{U_i}$. Ainsi, sur $N \times \{t_i\}$, $\widetilde{F} = p_{|U_i}^{-1} \circ F$ puisque $p_{|U_i}^{-1}$ est un homéomorphisme de U_i vers $\widetilde{U_i}$. Remarquons enfin que, par construction, $\widetilde{F}$ est continue, en tant que, localement, composée d'un homéomorphisme avec F qui est continue. Nous obtenons ainsi définie un relèvement de F sur $N \times I$ par le principe de récurrence.

Reste à montrer que nous pouvons étendre ce relèvement sur $Y \times I$. Pour cela, il suffit de montrer l'unicité dans le cas où Y est réduit à un point. Nous pouvons alors omettre Y dans les notations précédentes. Si $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F}'$ sont deux relèvements de F, alors, en appliquant de même le lemme de Lebesgue, nous obtenons une subdivision de I telle que $F([t_i;t_{i+1}]) \subset U_i$ où U_i désigne l'un des U_α. On montre alors par récurrence sur i que $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F}'$ coïncident sur $[0;t_i]$. L'initialisation est vérifiée, par hypothèse du théorème. Pour l'hérédité, remarquons que $[t_i;t_{i+1}]$ est connexe, donc par continuité de $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}([t_i;t_{i+1}])$ aussi. Ainsi, par connexité, $\widetilde{F}([t_i;t_{i+1}]) \subset \widetilde{U_i}$ où $\widetilde{U_i}$ est l'un des V_j de la proposition précédente, homéomorphe à U_i via p. On en a de même pour $\widetilde{F}'([t_i;t_{i+1}])$. En fait, ces deux ensembles sont dans le même $\widetilde{U_i}$ puisque qu'ils coïncident au point t_i par hypothèse de récurrence, et que les V_j sont des ensembles disjoints. Par injectivité de p sur $\widetilde{U_i}$, nous en déduisons que $F = p \circ \widetilde{F} = p \circ \widetilde{F}'$ implique $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ sur $[t_i;t_{i+1}]$, ce qui démontre l'unicité du relèvement par principe de récurrence.

Ainsi, nous pouvons définir le relèvement $\widetilde{F}$ construit précédemment sur n'importe quel ensemble du type $N \times I$, N ouvert contenant $y_0 \in Y$ quelconque, sur $Y \times I$. En effet, d'après ce qui précède, $\widetilde{F}$ est unique sur $\{x\} \times I$, $x \in N$, et donc unique sur $N \times I$. Donc si par hasard deux tels ensembles avaient une intersection non vide, par ce qui précède, nos deux définitions de $\widetilde{F}$ doivent coïncider, ce qui nous permet alors de définir un relèvement sur $Y \times I$, qui est unique par ce qui précède.

La proposition est démontrée.

$\square$

Lemme 1.2.3.

- *Pour tout* $f : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *chemin basé en* $x_0 \in \mathbb{S}^1$*, pour tout* $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$*, il existe un unique chemin* $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *basé en* $\widetilde{x_0}$ *tel que* $f = p \circ \widetilde{f}$*.*

- *Pour toute homotopie de chemins* $f_t : I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *basés en* $x_0 \in \mathbb{S}^1$*, pour tout* $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$*, il existe une unique homotopie de chemins* $\widetilde{f_t} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *basés en* $\widetilde{x_0}$ *telle que* $\forall t \in I, f_t = p \circ \widetilde{f_t}$*.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du lemme précédent, le premier cas étant pour Y réduit à un point et le deuxième cas étant pour $Y = I$. En effet, si $Y = I$, l'homotopie nous donne une application continue $F : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par : $\forall (s,t) \in I \times I, F(s,t) = f_t(s)$. En particulier, une application de la première partie du lemme nous donne un unique relèvement $\widetilde{f_0}$ de f_0, un chemin basé en $\widetilde{x_0}$. Ceci nous construit alors un unique relèvement $\widetilde{F_0} = \widetilde{F} : I \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{F}(0;0) = \widetilde{x_0}$. La proposition 1.2.2 nous donne alors un unique relèvement $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour le cas $Y = I$. On remarque enfin que les restrictions $\widetilde{F}_{|\{0\} \times I}$ et $\widetilde{F}_{|\{1\} \times I}$ sont des chemins qui relèvent des chemins constants, puisque F est une homotopie de chemins. Ces chemins sont donc constants par unicités du premier cas du lemme. $\widetilde{F}$ est donc une homotopie de chemins basés en $\widetilde{x_0}$.

$\square$

1.2.2 Calcul de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

Théorème 1.2.1. *L'application :*

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1) \\ n & \longmapsto & [\omega_n] \end{array} \right.$$

où $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in I, \omega_n(s) = (cos(2\pi ns); sin(2\pi ns))$ *est un isomorphisme.*

Ceci établit alors $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$

Démonstration. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in I, \widetilde{\omega_n}(s) = ns$. Alors $\omega_n = p \circ \widetilde{\omega_n}$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $\widetilde{f}$ chemin de 0 à n, $p \circ \widetilde{f}$ est homotope à ω_n. En effet, l'application $F(s;t) = t\widetilde{f}(s) + (1-t)\widetilde{\omega_n}(s)$ définie une homotopie de chemin entre $\widetilde{f}$ et $\widetilde{\omega_n}$, et donc entre $p \circ \widetilde{f}$ et ω_n. Donc $[p \circ \widetilde{f}] = [\omega_n]$ pour tout n entier et pour tout $\widetilde{f}$ chemin entre 0 et n.

Vérifions tout d'abord que ϕ est bien un morphisme de groupe. Soient alors n et m deux entiers relatifs. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \tau_m(x) = x + m$. Alors, $\widetilde{\omega_m}.(\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})$ est un chemin de 0 à $n+m$. Donc, par ce qui précède, $\phi(n+m) = [p \circ (\widetilde{\omega_m}.(\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})] = [(p \circ \widetilde{\omega_m}).(p \circ (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})] = [p \circ \widetilde{\omega_m}].[p \circ (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n})]$. Or, par périodicité de p, $p \circ (\tau_m \circ \widetilde{\omega_n}) = p \circ \widetilde{\omega_n}$. On a donc bien $\phi(n+m) = \phi(n).\phi(m)$, ce qui montre que ϕ est bien un morphisme.

Montrons à présent que c'est une bijection. Pour la surjection, soit f un lacet basé en $(1;0)$ (puisque le cercle unité est connexe par arcs, il n'y a aucune perte de généralité à prendre un lacet basé en ce point). On a $p(0) = (1;0)$. Donc, par le lemme précédent, il existe un unique chemin basé en 0, $\widetilde{f}$, tel que $p \circ \widetilde{f} = f$. $f(1) = (1;0)$, donc $p(\widetilde{f}(1)) = (1;0)$. Donc il existe un entier n tel que $\widetilde{f}(1) = n$. Ce relèvement est donc un chemin entre 0 et n. Donc, par ce qui précède, f est homotope à ω_n, d'où $\phi(n) = f$ ce qui établie la surjection.

Pour l'injection, supposons qu'il existe n et m deux entiers tels que $\phi(n) = \phi(m)$. Alors ω_n est homotope à ω_m. Soit $(f_t)_{t \in I}$ une homotopie de chemin basé en $(1;0)$ entre ω_n et ω_m. Par le lemme précédent, il existe alors une unique homotopie de chemins $(\widetilde{f_t})_{t \in I}$ basés en 0 relevant la première homotopie. Par unicité, nous avons alors $\widetilde{f_0} = \widetilde{\omega_n}$ et $\widetilde{f_1} = \widetilde{\omega_m}$. Or, puisque nous avons une homotopie de chemin, $\widetilde{f_t}(1)$ ne dépends pas de t. Donc $\widetilde{\omega_n}(1) = \widetilde{\omega_m}(1)$ d'où $n = m$ ce qui montre l'injection.

ϕ est donc bien un isomorphisme.

□

Nous venons de démontrer un premier calcul non trivial de groupe fondamental. En particulier, ce simple calcul nous donnera de nombreux exemples d'autres calculs de groupes fondamentaux qui nous seront utiles pour le théorème de Nielsen-Schreier.

1.3 Morphismes induits

Comme nous l'avons vu, le groupe fondamental nécessite dans la plupart des cas de nous munir d'un point, que nous appellerons *point-base*. Par la suite, nous dirons que (X, x_0) est un *espace topologique pointé* si X est un espace topologique et $x_0 \in X$. Enfin, si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces topologiques pointés, une *application pointée* f entre ces deux espaces pointés, notée $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, désignera une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que $f(x_0) = y_0$.

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.3.1. *Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés, et soit Φ : $(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continue.*
Alors Φ induit un morphisme de groupe noté Φ_* et appelé morphisme induit par Φ définie par :

$$\Phi_* : \left| \begin{array}{rcl} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ [f] & \longmapsto & [\Phi \circ f] \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie car Φ est supposée continue. Ainsi, si f est un lacet basé en x_0, $\Phi \circ f$ sera un lacet basé en y_0. De plus, L'image de l'application ne dépends pas du représentant de la classe. En effet, par continuité, Φ transporte les homotopies.

Remarquons enfin que c'est bien un morphisme : $\forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0), \Phi_*([f].[g]) = [\Phi \circ (f.g)] = [(\Phi \circ f).(\Phi \circ g)] = \Phi_*([f]).\Phi_*([g])$

Proposition 1.3.1. *Soient $(X, x_0) \xrightarrow{\psi} (Y, y_0) \xrightarrow{\varphi} (Z, z_0)$ deux applications continues entre des espaces topologiques pointés. Alors :*

- $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$
- $id_{X*} = id_{\pi_1(X, x_0)}$

Démonstration. Sans difficulté en appliquant la définition et l'associativité de la composée de fonctions.

□

Corollaire 1.3.1. *Si $\varphi : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est un homéomorphisme d'espaces topologiques pointés, alors φ_* est un isomorphisme. On en déduit alors :*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

Les homéomorphismes préservent donc les groupes fondamentaux.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la proposition précédente. En effet, si φ est un homéomorphisme d'inverse φ^{-1}, $(\varphi^{-1})_*$ est bien définie. De plus, par la première égalité de la proposition, nous avons $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = id_{Y*} = id_{\pi_1(Y,y_0)}$. Nous avons de façon similaire l'égalité inverse, ce qui montre que φ_* est inversible d'inverse $(\varphi^{-1})_*$. □

1.3.2 Rétraction de sous-espaces

Etant donné maintenant un espace topologique, et un sous-espace de ce dernier, pouvons-nous lier les deux groupes fondamentaux ? On pourrait croire, intuitivement, que la connaissance du groupe fondamental de plus grand espace nous donne des informations sur le groupe fondamental des petits espaces. Cependant, si nous pensons par exemple à $\mathbb{R}^2$, de groupe fondamental trivial, cet espace contient $\mathbb{S}^1$ dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}$. Pour avoir un lien entre les deux groupes fondamentaux, il nous faut donc des hypothèses plus fortes que la simple inclusion.

Définition 1.3.2. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$.*

- *On dit que A est un rétract de X si : $\exists r : X \longrightarrow A$ continue tel que $r_{|A} = id_A$. Cette application est alors appelée rétraction de X sur A.*
- *On dit que A est un rétract par déformation de X si il existe une rétraction r homotope à id_X. Ceci est équivalent à la donnée d'une homotopie $R : X \times I \longrightarrow X$ telle que :*

$$\forall x \in X, R(x,0) = x$$
$$\forall x \in X, R(x,1) \in A$$
$$\forall a \in A, R(a,1) = a$$

  où ici r corresponds à $x \longmapsto R(x,1)$.
- *Un rétract par déformation est dit fort si il existe une homotopie R entre r et id_X telle que : $\forall a \in A, \forall t \in I, R(a,t) = a$. En d'autres termes, R fixe A tout le long de la transformation.*

Proposition 1.3.2. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$ connexe par arcs. Si X se rétracte par déformation sur A, alors X est connexe par arcs.*

Démonstration. Pour montrer cela, il suffit de montrer que chaque élément de X est lié par un chemin à un élément de A. A étant connexe par arcs, nous aurons alors que tout couple de points de X sont liés par un chemin.

Soient alors $x \in X$ et $r : X \longrightarrow A$ un rétract par déformation de X sur A. Alors r est homotope à id_X. Notons $(r_t)_{t\in I}$ l'homotopie associée. On pose alors $\gamma(t) = r_t(x)$. γ est donc un chemin entre x et $r(x) \in A$.

X est donc connexe par arcs d'après la remarque précédente.

□

Proposition 1.3.3. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$.*

- *Si A est un rétract de X, alors l'injection $i : A \hookrightarrow X$ est telle que i_* soit injective.*

- *Si A est un rétract par déformation de X, alors i_* est un isomorphisme. On a donc : $\forall x_0 \in A$,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$$

Ainsi, si nous reprenons l'exemple du début de cette partie, nous observons que $\mathbb{S}^1$ n'est pas un rétracte de $\mathbb{R}^2$. En effet, cette proposition nous permet de voir que si A est un rétract de X, le morphisme induit par l'injection de A dans X nous donne une injection de $\pi_1(A, x_0)$ dans $\pi_1(X, x_1)$ où $x_0 \in A$, c'est-à-dire une inclusion.
Dans le cas d'un rétract par déformation, nous avons quelque chose de plus fort, puisque l'injection se révèle être en plus une surjection.

Démonstration. Pour les besoins de cette démonstration, il est nécessaire de changer nos notations. Nous travaillons ici avec deux relations d'équivalences différentes. L'une concerne les classes d'équivalence des lacets de X, l'autre la même chose, mais pour les lacets de A. Nous conviendrons alors de noter, pour un lacet f dans A, $[f]_X$ sa classe d'équivalence dans X, et $[f]_A$ sa classe d'équivalence dans A.

- Soit r la rétraction de X sur A. Supposons qu'il existe deux lacets f et g dans A tels que $i_*([f]_A) = i_*([g]_A)$. Alors $[f]_X = [g]_X$ par définition de i_*. Puisque r est continue, r_* existe. Ceci nous donne alors $r_*([f]_X) = r_*([g]_X)$ soit $[r \circ f]_A = [r \circ g]_A$. Or, $r_{|A} = id_A$ d'où $[f]_A = [g]_A$ ce qui montre l'injectivité de i_*.

- i_* est déjà injective par le point précédent. Donc soit f un lacet sur X et soit $(r_t)_{t\in I}$ une homotopie entre $r_0 = id_X$ et $r_1 = r$. Alors $(r_t \circ f)_{t\in I}$ est une homotopie entre f et $r \circ f$ qui est un lacet de A. Donc $[f]_X = i_*([r \circ f]_A)$ ce qui montre la surjectivité, et donc le caractère isomorphe de i_*.

□

Ce résultat peut aussi en particulier nous montrer que certains sous-espaces ne sont pas rétractes par déformations de leur espace ambiant. Par exemple, si on travaille dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$, et avec un arc de cercle strict (c'est-à-dire distinct du cercle), le premier est, comme nous l'avons vu, de groupe fondamental égal à $\mathbb{Z}$, tandis que le deuxième est simplement connexe. Ceci montre alors qu'un arc de cercle distinct du cercle n'est pas un rétracte par déformation du cercle.

1.3.3 Equivalences d'homotopies

Rappelons une définition rencontrée au tout début de ces écrits. Soit h un chemin de X de x_0 à x_1. On définit alors l'application β_h par :

$$\beta_h : \left| \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X,x_1) \\ [f] & \longmapsto & [h.f.\overline{h}] \end{array} \right.$$

Lemme 1.3.1. *Soit $(\varphi_t)_{t\in I}$ une homotopie de X dans Y deux espaces topologiques. Soit $x_0 \in X$. On définit un nouveau chemin en posant : $\forall t \in I, h(t) = \varphi_t(x_0)$.*

On a alors $\varphi_{0*} = \beta_h \circ \varphi_{1*}$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y,\varphi_1(x_0)) \arrow[dd, "\beta_h"] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "\varphi_{1*}"] \arrow[dr, "\varphi_{0*}"'] & \\ & \pi_1(Y,\varphi_0(x_0)) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit f un lacet basé en x_0. $(\beta_h \circ \varphi_{1*})([f]) = \beta_h([\varphi_1 \circ f]) = [h.(\varphi_1 \circ f).\overline{h}]$.

On pose : $\forall t \in I, \forall s \in I, h_t(s) = h(ts)$. $(h_t)_{t\in I}$ est ainsi trivialement une homotopie, donc $(h_t.(\varphi_t \circ f).\overline{h_t})_{t\in I}$ est donc aussi une homotopie. On a de plus : $h_0.(\varphi_0 \circ f).\overline{h_0} = \varphi_0 \circ f$ et $h_1.(\varphi_1 \circ f).\overline{h_1} = h.(\varphi_1 \circ f).\overline{h}$. Ces deux quantités sont alors homotopes, d'où $[\varphi_0 \circ f] = [h.(\varphi_1 \circ f).\overline{h}]$. f étant quelconque, l'égalité entre les morphismes est démontrée.

□

Définition 1.3.3. *Soient (X,x_0) et (Y,y_0) deux espaces topologiques pointés. On dit que (X,x_0) est homotopiquement équivalent à (Y,y_0) si il existe $\varphi : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ et $\Psi : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ continues telles que $[\varphi \circ \psi] = [id_Y]$ et $[\psi \circ \varphi] = [id_X]$. De telles applications sont appelées équivalences d'homotopie.*

En d'autres termes, deux espaces pointés sont homotopiquement équivalent s'il existe une application inversible à homotopie près de l'une dans l'autre. Cette notion nous permet alors de lier le groupe fondamental de l'un, basé en un point, avec le groupe fondamental de l'autre, basé cette fois-ci en l'image du point par une homotopie d'équivalence. C'est ce que nous donne la proposition suivante :

Proposition 1.3.4. *Soient X et Y deux espaces topologiques pointés. Soient $x_0 \in X$ et $\varphi : (X, x_0) \longrightarrow (Y, \varphi(x_0))$ une équivalence d'homotopie. Alors φ_* est un isomorphisme de groupe.*

On obtient alors : $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, \varphi(x_0))$.

Un résultat similaire a déjà été obtenu, dans le cas où nous avions un homéomorphisme. Un homéomorphisme est bien-sûr un cas particulier d'équivalence d'homotopie. Cette propriété a l'avantage d'être moins contraignante, puisqu'on ne cherche plus un homéomorphisme, mais une application "inversible" à homotopie près.

Démonstration. $[\psi \circ \varphi] = [id_X]$ donc d'après le lemme, $\exists h_1$, $(\psi \circ \varphi)_* = \beta_{h_1} \circ id_{X*}$ où h_1 est donné par le lemme. Donc $\psi_* \circ \varphi_* = \beta_{h_1}$ qui est un isomorphisme. On en déduit que φ_* est injectif, et ψ_* surjectif. Puisque φ et ψ ont un rôle symétrique, on a en particulier que φ_* est aussi surjectif, et donc bijectif ce qui démontre la proposition.

□

1.4 Extension des homotopies

Une notion qui nous sera utile pour la suite est quelque chose d'assez naturel que nous cherchons à avoir lorsque nous considérons un sous-espace d'un espace ambiant.

1.4.1 Définitions et propriétés

Soient X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace. Supposons que nous ayons une famille d'homotopie de A dans un autre espace topologique quelconque Y. Supposons que la première de ces applications s'étendent en une application continue sur X. Alors on aimerait pouvoir en faire de même pour toutes les autres applications de l'homotopie. Si cette propriété est satisfaite, on dit que le couple $(X; A)$ satisfait la propriété d'extensions des homotopies.

La définition suivante formalise un peu tout ce que nous avons dit :

Définition 1.4.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $A \subset X$.*
On dit que le couple (X, A) possède la propriété d'extension d'homotopies si pour toute application $g : X \longrightarrow Y$ et pour toute homotopie $f_t : A \longrightarrow Y$ telle que $g_{|A} = f_0$, il existe une homotopie $f_t : X \longrightarrow Y$ qui étends les applications précédentes.

Remarque 1.4.1. *Cette définition peut être contractée en une seule ; (X, A) satisfait la propriété d'extension d'homotopies si et seulement si toute applications continues $X \times \{0\} \longrightarrow Y$*

et $A \times I \longrightarrow Y$ qui coïncident sur $A \times \{0\}$ peuvent s'étendre en une application continue $H : X \times I \longrightarrow Y$. L'équivalence est évidente par la définition même d'une homotopie.

Proposition 1.4.1. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace fermé de X. Alors (X, A) satisfait la propriété d'extension des homotopies si et seulement si $X \times \{0\} \cup A \times I$ est un rétracte de $X \times I$.*

Démonstration. Si la propriété d'extension des homotopies est satisfaite, alors, en particulier, l'application identité $X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ s'étends en une application continue $X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$. Donc $X \times \{0\} \cup A \times I$ est un rétracte de $X \times I$.

Réciproquement, si deux applications continues $X \times \{0\} \longrightarrow Y$ et $A \times I \longrightarrow Y$ coïncident en $A \times \{0\}$, alors on peut les combiner en une application $X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$, qui est continue puisque les ensembles $X \times \{0\}$ et $A \times I$ sont fermés, car A est fermé dans X. En composant cette application avec une rétraction, on étends alors ces deux applications en une application continue sur $X \times I$.

□

Définition 1.4.2. *Soit X un espace topologique.*
On dit que X est contractile si $\exists x \in X$, $\{x\}$ est un rétract de X par déformation.

En particulier, le groupe fondamental d'un espace contractile est trivial. Ceci nous sera très utile pour la suite, puisque cela nous donne un critère suffisant pour qu'un espace topologique soit simplement connexe.

Proposition 1.4.2. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$.*
Si $(X; A)$ satisfait la propriété d'extension des homotopies et que A est contractile, alors l'application quotient $q : X \longrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. A est contractile, donc il existe $x_0 \in A$ telle que $f_1 : A \longrightarrow \{x_0\}$ soit homotope à $f_0 = id_A$. On note alors $(f_t)_{t \in I}$ l'homotopie entre f_1 et f_0 où $\forall t \in I, f_t : A \longrightarrow A$. f_0 s'étend trivialement en l'application identité sur X. Donc, puisque (X, A) satisfait la propriété d'extension des homotopies, nous pouvons étendre notre homotopie $f_t : X \longrightarrow X$. Puisque $\forall t \in I, f_t(A) \subset A$, l'application $q \circ f_t : X \longrightarrow X/A$ envoie A sur un point. Donc, par la propriété universelle du quotient, il existe $\overline{f_t} : X/A \longrightarrow X/A$ telle que $q \circ f_t = \overline{f_t} \circ q$.

Par le même procédé, puisque $f_1(A) = \{x_0\}$, il existe $g : X/A \longrightarrow X$ tel que $g \circ q = f_1$. Or, $\forall \overline{x} \in X/A$, $(q \circ g)(\overline{x}) = (q \circ g) \circ q(x) = q \circ f_1(x) = (\overline{f_1} \circ q)(x) = \overline{f_1}(\overline{x})$. Donc $q \circ g = \overline{f_1}$. Ainsi, $g \circ q$ est homotope à l'identité de X via $(f_t)_{t \in I}$, et $q \circ g$ est homotope à l'identité sur X/A via $(\overline{f_t})_{t \in I}$. q est donc bien une équivalence d'homotopie.

□

1.4.2 Le cas des CW-complexes

Par la suite, nous aurons besoin d'utiliser la proposition 1.4.2 dans un cadre très spécifique pour démontrer le théorème de Nielsen-Schreier. Ce sont les cas des CW-pairs.

Définition 1.4.3. *Soit X un espace topologique. Soit $k \in \mathbb{N}$.*

- *On appelle k-cellule le bord du disque unité de $\mathbb{R}^k$: ∂D^k.*
- *L'action d'attachement d'une k-cellule sur X consiste à se donner une application continue $\varphi : \partial D^k \longrightarrow X$ et à quotienter l'union disjointe $X \sqcup D^k$ par la relation d'équivalence $x \sim \varphi(x)$.*

En d'autres termes, nous attachons à X la boule D^k le long de son bord.

Ceci étant dit, nous pouvons définir les CW-complexes :

Définition 1.4.4. *On appelle CW-complexe tout espace topologique X construit par ces différentes étapes :*

- *On se donne un espace discret de points X^0 (des 0-cellules).*
- *Pour obtenir le n-squelette X^n, on attache des n-cellules à l'espace X^{n-1} via des applications continues de ∂D^{n-1} vers X^{n-1}.*
- *X est obtenu en faisant l'union des X^n, et en donnant la topologie suivante : $A \subset X$ est ouvert (ou fermé) dans X si et seulement si $\forall n, A \cap X^n$ est ouvert (ou fermé) dans X^n.*

Remarquons bien sûr que le CW-complexe obtenu dépends intimement des applications continues dont nous nous sommes munies pour attacher les cellules.

Remarquons de plus que l'étude des CW-complexe dépasse totalement l'étude de la théorie de Galois des revêtements. Néanmoins, en plus d'être des objets très intéressants à étudier, ils apportent des éléments de preuve pour le théorème de Nielsen-Schreier.

Définition 1.4.5. *Soit X un CW-complexe. On appelle sous-complexe tout sous-espace A fermé dans X qui est union de cellules de X. Le couple (X, A) est appelé CW-pair.*

Nous allons maintenant tenter de démontrer une proposition importante, qui est qu'en fait tout CW-pair satisfait la propriété d'extension d'homotopies. Nous allons pour cela passer par quelques lemmes :

Lemme 1.4.1. *Soit $Z = \bigcup_{n \geqslant 1} Z_n$ un CW-complexe où chaque Z_n est un sous-complexe de Z. On suppose que $\forall n \geqslant 1, Z_n$ est un rétract par déformation forte de Z_{n+1}.*
Alors Z se rétracte par déformation forte sur Z_1.

Démonstration. On commence d'abord par démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, Z_n se rétracte par déformation forte sur Z_1. Pour cela, soit $F^{(n)} : Z_n \times [\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}] \longrightarrow Z_n$ telle que $F^{(n)}_{\frac{1}{n}} = id_{Z_n}$ et $F^{(n)}_{\frac{1}{n-1}} : Z_n \longrightarrow Z_{n-1}$. On définit alors $G^{(n)} : Z_n \times I \longrightarrow Z_n$ comme étant la projection $(x;t) \longmapsto x$ sur $Z_n \times [0; \frac{1}{n}]$ et comme étant $F^{(n-k)} \circ (F^{(n-k+1)}_{\frac{1}{n-k}} \times id) \circ ... \circ (F^{(n)}_{\frac{1}{n-1}} \times id)$ sur $Z_n \times [\frac{1}{n-k}; \frac{1}{n-k-1}]$ pour $k = 0, ..., n-2$. Alors, $G^{(n)}$ décrit une rétraction forte de Z_n sur Z_1. De plus, $G^{(n)}$ coïncide avec $G^{(n-1)}$ sur $Z_{n-1} \times I$. Ainsi, $G : Z \times I \longrightarrow Z$ définie comme étant $G^{(n)}$ sur $Z_n \times I$ est une rétraction par déformation forte de Z sur Z_1.

□

Lemme 1.4.2. *Soit e une boule de dimension supérieure à 1. Alors $e \times \{0\} \cup \partial e \times I$ est un rétracte par déformation forte de $e \times I$.*

Démonstration. Il suffit de définir r comme étant la projection radiale r du point $(0;2) \in e \times I$ sur $e \times \{0\} \cup \partial e \times \mathbb{R}$. Il suffit pour cela de représenter, dans le plan, $e \times I$ ainsi que le point $(0;2)$ pour se convaincre de la continuité de r. Pour le rétracte par déformation forte, il suffit de prendre l'homotopie $r_t = tr + (1-t)id$.

□

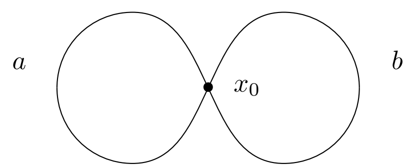
Proposition 1.4.3. *Soit (X, A) un CW-pair. Alors (X, A) satisfait la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. Par la proposition 1.4.1, il suffit pour cela de montrer que $X \times \{0\} \cup A \times I$ est un rétracte par déformation forte de $X \times I$. Or, le lemme précédent nous donne, en particulier, un rétracte par déformation forte de $(X^n \cup A) \times I$ sur $((X^n \cup A) \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A) \times I = (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A) \times I$, puisque $X^n \cup A$ est obtenu en attachant des cellules à $X^{n-1} \cup A$. On pose alors $Z_n = (X \times \{0\}) \cup ((X^n \cup A) \times I)$, $Z = X \times I$, $Z_{-1} = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Alors $Z = \bigcup_{n \geqslant -1} Z_n$ et pour tout n, Z_n se rétracte par déformation sur Z_{n-1}. D'après 1.4.1, Z se rétracte par déformation forte sur Z_{-1} ce qui démontre la propriété d'extension des homotopies. □

1.5 Calcul du groupe fondamental

Dans cette partie, nous allons expliciter une méthode de calcul du groupe fondamental. Cette méthode ne permet pas de calculer, a priori, tous les groupes fondamentaux (par exemple, on ne peut établir le groupe fondamental du cercle avec cette méthode). Néanmoins ce théorème puissant nous permet de lier le groupe fondamental d'un ensemble avec le groupe fondamental de certains de ses parties.

Prenons par exemple un espace topologique simple. Soit la figure "huit", qui corresponds en fait à ce que nous appellerons plus tard au bouquet du cercle $\mathbb{S}^1$ avec lui-même (ou *wedge sum*).



Notons a et b les deux lacets désignés décrit par les deux cercles de la figure "huit", dans le sens trigonométrique (cela n'a cependant aucune importance sur le raisonnement). Nous pouvons nous intéresser sur ce dessin au groupe fondamental de cet espace basé au point x_0. Il est clair (sur le dessin !) que, si on veut un lacet basé en x_0, nous allons l'exprimer comme combinaison des deux lacets a et b. Nous avons envie de l'exprimer, par exemple, comme ab^3aba^2, ce qui nous donne alors un certain lacet basé en x_0. En clair, nous allons dire que le groupe fondamental de cet ensemble corresponds à toutes les combinaisons que nous pouvons faire avec les deux copies du groupe fondamental du cercle.

C'est ce que va nous permettre d'établir le théorème de Van Kampen sous certaines hypothèses.

1.5.1 Préliminaires algébriques

Avant d'énoncer le théorème, il est important d'introduire certaines notions qui ne seront utiles par la suite ; ce sont les notions de *groupes libres* et de *produits libres de groupes.*

1.5.1.1 Groupes libres

Pour introduire la notion de groupes libres, inspirons nous de l'algèbre linéaire, où la terminologie "libre" est aussi utilisée. Une famille de vecteurs est dite *libre* si il n'existe aucune combinaison linéaire non triviale qui soit nulle. En d'autres termes, les vecteurs ne sont reliés par aucune relation entre eux, ce qui explique aussi la terminologie équivalente "linéairement indépendant". De ce fait, tout vecteur de l'espace vectoriel engendré par cette famille s'exprimera de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Plus qu'une famille génératrice, on dit que cette famille forme une *base* de cet espace vectoriel.

C'est cette idée que nous allons introduire pour définir les groupes libres. Intuitivement, un groupe libre sera un groupe engendré par certains éléments qui n'auront aucune relation non triviale entre eux. Si nous voulons, comme pour l'algèbre linéaire, reformuler cela en terme d'unicité, il est important d'introduire une terminologie. Un produit $g_1. \dots .g_m$ dans un groupe G sera dit réduit si $\forall i, g_i.g_{i+1} \neq 1$. En d'autres termes, nous allons regarder les écritures non triviales des éléments du groupe, une écriture où on ne fait pas apparaître un terme de la forme gg^{-1} ou $g^{-1}g$. Ce faisant, un groupe libre se traduira alors en terme d'unicité de l'écriture réduite en fonction des générateurs.

Définition 1.5.1. *Soient G un groupe et $S \subset G$. G est dit libre sur S si tout élément de G distinct du neutre s'écrit de façon unique comme produit réduits d'éléments, et leurs inverses, de S.*

Plus généralement, on dira que G est libre si il existe $S \subset G$ tel que G soit libre sur S. Auquel cas, S sera appelé *ensemble de générateurs de G*.

Faisons maintenant le chemin inverse. Ayant un ensemble quelconque S, peut-on trouver un groupe libre sur cet ensemble ? La propriété suivante réponds à cette question.

Proposition 1.5.1. *Soit S un ensemble quelconque. Il existe un groupe libre F_S sur S.*

Démonstration. Soit S^{-1} un ensemble quelconque équipotent à S (quitte à choisir le même, en supposant les éléments distincts). On note, pour $x \in S$, x^{-1} son image dans S^{-1}. On pose alors $\mathcal{M}(S)$ l'ensemble des mots sur S, c'est-à-dire l'ensemble des produits formels $x_1 \dots x_p$ avec $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $x_i \in S \cup S^{-1}$. On inclura aussi dans cet ensemble le mot vide, c'est-à-dire celui obtenu en en ne faisant aucun produit formel de ce type.

On définit alors une relation d'équivalence sur cet ensemble par : $x \equiv y$ si et seulement si x est obtenu par y en occultant ou en ajoutant des éléments du type $s\ s^{-1}$ ou $s^{-1}\ s$ pour $s \in S$. Cette relation est bien sûr une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}(S)$.

On note alors $F_S := \mathcal{M}(S)/\equiv$ l'ensemble quotient associé, et on définit une structure de groupe sur cet ensemble avec la concaténation des mots. Ceci définit bien-sûr un groupe, et nous avons $S \hookrightarrow F_S$ avec les mots composés de un seul élément. Leur inverse corresponds à S^{-1}. Enfin, par construction, l'unicité de l'écriture des éléments de F_S en produit d'éléments de S est garantie par construction. F_S est donc libre sur S.

$\square$

Théorème 1.5.1. *Soit S un ensemble quelconque. Alors le groupe libre F_S construit précédemment est unique à isomorphisme près et satisfait la propriété universelle suivante :*

Pour tout groupe G, pour tout $f : S \longrightarrow G$ application, il existe un unique morphisme de groupe $\varphi : F_S \longrightarrow G$ qui étends f.

En fait, cette propriété universelle définit à elle seule ce qu'est un groupe libre sur un ensemble S. Néanmoins, nous avons privilégié ici la construction de ce groupe à la propriété universelle satisfaite.

Démonstration. Si l'existence de φ est avérée pour un groupe G quelconque, on aura démontré l'unicité de F_S à isomorphisme près. En effet, supposons ceci vrai. Soit F'_S un autre groupe libre sur S. Alors il existe $\varphi_1 : F_S \longrightarrow F'_S$ et $\varphi_2 : F'_S \longrightarrow F_S$ deux morphismes de groupe qui étendent respectivement $id_1 : S \longrightarrow F_S$ et $id_2 : S \longrightarrow F'_S$. Alors, $\varphi_1 \circ \varphi_2 : F'_S \longrightarrow F'_S$ est un morphisme de groupe qui étends id_2. Or, l'identité sur F'_S satisfait aussi cette propriété. Par unicité, $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est l'identité sur F'_S. On a de même inversement, ce qui garantie que φ_1 est en réalité un isomorphisme.

Montrons l'existence de ce φ pour tout groupe G. Soit $x \in F_S$. Alors $x = s_1 \dots s_m$ de façon réduite et unique avec $s_i \in S \cup S^{-1}$. Pour définir φ, on commence par donner son image par les éléments de $S \cup S^{-1}$. On pose pour $s \in S \cup S^{-1}$, $\varphi(s) = f(s)$ si $s \in S$ et $\varphi(s^{-1}) = f(s)^{-1}$ si s^{-1} est l'élément de S^{-1} associé à $s \in S$. On pose alors $\varphi(x) = \varphi(s_1) \dots \varphi(s_m)$. φ est bien définit, car si deux éléments sont équivalents, ils sont les mêmes modulo des éléments du type ss^{-1} ou $s^{-1}s$, qui s'envoient sur l'élément neutre de G par φ. C'est de plus trivialement un morphisme de groupe, et son unicité est garantie, puisque l'application f détermine entièrement l'image d'un quelconque morphisme de groupe de F_S dans G.

Ainsi, la propriété universelle est satisfaite.

□

Donnons un exemple fondamental de groupe libre ; il s'agit du groupe $\mathbb{Z}$. En effet, il est libre sur l'ensemble $\{1\}$, qui engendre bien $\mathbb{Z}$. Soit H un groupe quelconque, et soit $x \in H$ un élément associé à 1. On définit alors : $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n) = x^n$.

Dans ce cas, cette application est bien un morphisme de groupe qui envoie 1 sur x. Puisque 1 génère $\mathbb{Z}$, φ est la seule application qui envoie 1 sur x qui soit un morphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans H. $\mathbb{Z}$ est donc libre.

1.5.1.2 Produit libre de groupes

Attardons-nous à présent sur la généralisation de notre exemple étudié au tout début du paragraphe. Ce que nous venons de faire sans le dire est en réalité le produit libre du groupe $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ avec lui-même, que nous allons chercher à définir pour des groupes quelconques.

L'idée intuitive du produit libres de groupe, est de faire quelque chose de similaire au produit direct, ou à la somme directe pour les espaces vectoriels. Le problème de ces structures est que, même si elle permettent d'injecter trivialement les groupes dont nous nous sommes munis au départ, ces structures ajoutent en plus des relations de commutation. L'idée du produit libre de groupe est alors de créer un nouveau groupe dans lequel vont s'injecter nos groupes, mais de façon à ce qu'aucune relation entre ces groupes ne soient permise (donc en particulier, pas de commutativité entre plusieurs injections différentes des groupes de départ).

Définition 1.5.2. *Soient A un ensemble d'indice et $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de groupe.*
On définit alors un nouvel ensemble, noté $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ et appelé produit libre de la famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ comme étant l'ensemble des produits formels $g_1\ g_2 \dots g_m$, $m \geqslant 1$ tels que :

- $\forall i \in [\![1; m]\!]$, $\exists \alpha_i \in A$, $g_i \in G_{\alpha_i}$
- $\forall i \in [\![1; m]\!]$, $G_{\alpha_i} \neq G_{\alpha_{i+1}}$

- $\forall i \in [\![1; m]\!]$, $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$

En d'autres termes, cette décomposition est dites réduite, c'est-à-dire que tous les termes se simplifiant ou étant dans un même groupe, et qui sont côte à côte, sont considérés comme étant un seul.

Par convention, on considère que cet ensemble contient aussi le mot vide, qui ne contient aucun lettre.

Ainsi, le produit libre d'une famille de groupe, c'est tout simplement le plus petit groupe qui va tous les contenir, et qui est obtenu en n'imposant aucune relation entre les G_α. On peut donc à ce stade déjà postuler que tout produit libre de groupes libres est encore libre.

Remarquons enfin que si par hasard un des G_α venait à être égal à un autre, ou même inclus, puisque nous travaillons avec des produits formels, il convient de différencier les éléments dans leur écriture. Par exemple, Si nous souhaitons décrire les éléments de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, nous pouvons prendre $\mathbb{Z} =< a >=< b >$ et noter les éléments du produit libre en fonction de a et b, le a faisant référence au premier $\mathbb{Z}$, et le b au deuxième.

Remarque 1.5.1. *$\forall \alpha \in A$, G_α s'injecte ainsi trivialement dans $\circledast_{\alpha \in A} G_\alpha$. Ainsi, nous considérons par la suite que $G_\alpha \subset \circledast_{\alpha \in A} G_\alpha$*

Nous aimerions à présent donner une structure de groupe à cet ensemble. Pour cela, soient x et y dans le produit libre des G_α. On définit le produit $x.y$ comme étant la concaténation de leur produit formel, que nous réduisons ensuite, c'est-à-dire :

- Si un terme de la forme $g\ g^{-1}$ apparaît, on le retire du mot.
- Si un terme de la forme $g_1\ g_2$ apparaît avec g_1,g_2 dans un même groupe G_α, alors on remplace ce terme par le produit $g = g_1 g_2$ dans le groupe.

De cette façon, nous définissons une loi sur cet ensemble. Satisfait-elle seulement les axiomes nécessaires pour un groupe ? La proposition suivante va nous confirmer que ce choix était le bon.

Proposition 1.5.2. *Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de groupe. Alors $\circledast_{\alpha \in A} G_\alpha$ est un groupe pour l'opération de la loi de concaténation puis réduction des mots.*

Démonstration. Par la façon dont nous avons définie le produit, il est évident que cette loi est un produit interne. On a de plus un élément neutre (qui est le mot vide) ainsi qu'un inverse pour chaque élément $g_1\ ...\ g_m$ qui est $g_m^{-1}\ ...\ g_1^{-1}$.

Le point le plus difficile de la démonstration est de montrer l'associativité de ce produit. Pour cela, nous allons définir, pour $g \in G_\alpha$ l'application définie par : $L_g(g_1\ ...\ g_m) = g\ g_1\ ...\ g_m$

le mot réduit (on remplacera alors $g\ g_1$ par son produit si g et g_1 sont dans le même groupe). Nous avons alors, par associativité dans G_α, $\forall g, g' \in G_\alpha$, $L_{gg'} = L_g L_{g'}$. Ainsi, si on note $W = *_{\alpha \in A} G_\alpha$ et $P(W)$ l'ensemble des permutations de W, on peut définir une application $L : W \longrightarrow P(W)$ par : $L_{g_1\ ...\ g_m} = L_{g_1} \circ ... \circ L_{g_m}$. L'application L est injective, puisque $L_{g_1\ ...\ g_m}(e) = g_1\ ...\ g_m$. Ainsi, L transporte la loi que nous avons définie vers la loi de composition, qui est associative. La loi de concaténation est donc bien associative. W est donc bien un groupe, muni de cette loi.

□

Plus précisément, ce groupe possède une caractérisation par une propriété universelle qui est assez intuitive. Elle nous dit que si nous avons des morphismes de groupes de G_α pour tout α vers un groupe quelconque H, alors ces morphismes s'étendent en un nouveau morphisme du produit libre vers H :

Théorème 1.5.2. *Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de groupe.*
$*_{\alpha \in A} G_\alpha$ est l'unique groupe W, à isomorphisme près, dans lequel les G_α s'injectent tel que la propriété universelle suivante soit respectée : Pour tout groupe H, $\forall \varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ morphismes de groupe, $\exists! \varphi : W \longrightarrow H$ morphisme de groupe tel que $\forall \alpha \in A, \varphi_{|G_\alpha} = \varphi_\alpha$.

Démonstration. Soit $g_1\ ...\ g_m$ un mot réduit dans $*_{\alpha \in A} G_\alpha$, avec $\forall i \in [\![1; m]\!], g_i \in G_{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in A$. Soient $\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ une famille de morphismes de groupes dans H. On définit alors $\varphi(g_1\ ...\ g_m) = \varphi_{\alpha_1}(g_1)\varphi_{\alpha_2}(g_2)...\varphi_{\alpha_m}(g_m)$. Par la loi que nous avons définit, φ est trivialement un morphisme de groupe de $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ vers H qui étends les φ_α. Il est bien sûr unique puisque entièrement déterminé par les φ_α.

Réciproquement, si W est un autre groupe vérifiant cette hypothèse, alors nous pouvons prendre $H = *_{\alpha \in A} G_\alpha$ et φ_α les injections canoniques de G_α dans H. Ceci nous donne un morphisme $\varphi : W \longrightarrow *_{\alpha \in A} G_\alpha$ unique qui étends les φ_α. De même, par ce que nous avons démontré, nous pouvons inverser les rôles, nous donnant $\psi : *_{\alpha \in A} G_\alpha \longrightarrow W$ qui étends lui aussi les φ_α. Ainsi, $\varphi \circ \psi$ est un morphisme de $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ dans lui-même qui étends les injections de G_α dans $*_{\alpha \in A} G_\alpha$. Or, l'application identité satisfait aussi cette propriété, d'où $\varphi \circ \psi = id$. On a de même réciproquement, ce qui montre que $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ et W sont isomorphes.
□

Démontrons à présent le postulat qui a été énoncé au début de la section :

Proposition 1.5.3. *Soit $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de groupes libres. Alors le produit libre de cette famille est un groupe libre.*

Démonstration. Soit G le produit libre des G_α. Pour $\alpha \in A$, on note S_α l'ensemble sur lequel G_α est libre (donc $S_\alpha \subset G_\alpha$). Soit $S = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, et montrons que G est libre sur S.

Soit pour cela un groupe H quelconque, et soit $f : S \longrightarrow H$ une application quelconque. Nous souhaitons étendre f de façon unique en un morphisme de groupe de G vers H. Or, $\forall \alpha \in A$, G_α est libre et f induit $f_{|S_\alpha} : S_\alpha \longrightarrow H$. Donc pour tout $\alpha \in A$, il existe un unique morphisme $\varphi_\alpha : G_\alpha \longrightarrow H$ qui étends $f_{|S_\alpha}$, par la propriété universelle des groupes libres. Donc, par la propriété universelle du produit libre, il existe un unique morphisme $\varphi : G \longrightarrow H$ qui étends les φ_α. Ainsi, en particulier, φ étends f. On a donc montré l'existence d'un morphisme de G vers H qui étends f.

Pour l'unicité, remarquons que si ψ est un morphisme de G vers H qui étends f, alors on peut s'intéresser à $\psi_{|G_\alpha}$. C'est un morphisme de groupe, cette fois-ci de G_α vers H, et qui étends $f_{|S_\alpha}$, par hypothèse. Mais φ_α est l'unique morphisme qui étends $f_{|S_\alpha}$, donc $\psi_{|G_\alpha} = \varphi_\alpha$. ψ est donc un morphisme qui étends les φ_α, comme φ, qui est unique par propriété universelle du produit libre. Donc $\psi = \varphi$ ce qui montre l'unicité.

La propriété est donc démontrée.

□

Corollaire 1.5.1. *Soit A un ensemble d'indice quelconque.*
Alors $\circledast_{\alpha\in A}\mathbb{Z}$ est un groupe libre de générateur équipotent à A.

Démonstration. Nous avons déjà montré que $\mathbb{Z}$ est un ensemble libre à un générateur. Ainsi, par la propriété précédente, le produit libre est encore libre, avec pour générateur la réunion des générateurs des groupes libres. Puisque $\mathbb{Z}$ est un groupe libre à un générateur, cet ensemble de générateur est équipotent à A.

□

En particulier, une application intéressante est celle dans le cas où A est fini. On obtient alors que le groupe libre à $n \in \mathbb{N}$ générateurs est $\mathbb{Z} * ... * \mathbb{Z}$ n fois, et est noté $\mathbb{F}_n$.

1.5.2 Théorème de Van Kampen

Nous pouvons maintenant attaquer le théorème de Van Kampen. Le théorème de Van Kampen est un théorème fondamental en topologie algébrique, puisqu'il donne une façon non triviale de calculer des groupes fondamentaux.

1.5.2.1 Enoncé du théorème

Avant d'énoncer le théorème, nous avons cependant besoin de quelques notations.

Soient X un espace topologique connexe par arcs et $(A_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille de partie de X telle que $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.
On définit alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \Lambda^2$, $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \longrightarrow \pi_1(X)$ et $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \longrightarrow \pi_1(A_\alpha)$ les applications induitent par les inclusions.

Par la propriété universelle du produit libre, il existe un unique morphisme de $\circledast_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)$ vers $\pi_1(X)$ induit par les j_α que nous noterons Φ.

Remarque 1.5.2. *Nous avons alors* $\forall\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} \in Ker\ \Phi$.
En effet, nous avons la relation $j_\alpha \circ i_{\alpha\beta} = j_\beta \circ i_{\beta\alpha}$. *Or,* Φ *étends les* j_α *d'où :*

$$\forall\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta),\ \Phi(i_{\alpha\beta}(\omega)) = \Phi(i_{\beta\alpha}(\omega)) \Rightarrow \Phi(i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}) = 1.$$

Définition 1.5.3. *Soit* G *un groupe et soit* $S \subset G$ *une partie de* G.
Le sous-groupe normalement engendré par S *dans* G *est le plus petit groupe contenant* S *et normal dans* G.

Remarquons que ce groupe existe toujours, puisque G est un groupe normal dans G contenant S.

Ceci étant dit, énonçons le théorème de Van Kampen :

Théorème 1.5.3. *(de Van Kampen)*
Soient X *un espace topologique et* $x_0 \in X$. *Soit* $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ *une décomposition de* X *en ouverts connexes par arcs contenant tous* x_0.
On suppose que $\forall(\alpha;\beta) \in \Lambda^2$, $A_\alpha \cap A_\beta$ *connexe par arcs. Alors :*

- $\Phi : *_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha) \longrightarrow \pi_1(X)$ *est surjective.*
- *Si de plus* $\forall(\alpha;\beta;\gamma) \in \Lambda^3$, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ *est connexe par arcs, alors le noyau de* Φ *est exactement le sous-groupe* N *normalement engendré par les éléments du type* $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ *dans* $\pi_1(X)$.

Ainsi, nous avons $\pi_1(X) \cong *_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)/N$

Avant de démontrer, illustrons ce que nous dit ce théorème. Plaçons nous dans le cas où $\Lambda = \{1;2\}$ (donc nous avons uniquement deux ouverts à gérer). Les deux hypothèses du théorème sont vérifiées, et nous avons alors que pour tout groupe G et pour tout morphismes $h_1 : \pi_1(A_1, x_0) \longrightarrow G$ et $h_2 : \pi_2(A_2, x_0) \longrightarrow G$ vérifiant $h_1 \circ i_{21} = h_2 \circ i_{12}$, il existe un unique morphisme $h : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ tel que $h \circ j_1 = h \circ j_2$.

En d'autres termes, le théorème de Van Kampen nous dit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A_1, x_0) \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drr, "h_1"] & & \\
\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \arrow[ur, "i_{21}"] \arrow[dr, "i_{12}"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "h"] & G \\
& \pi_1(A_2, x_0) \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, "h_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\pi_1(X, x_0)$ corresponds à ce qu'on appelle la *somme amalgamée de* $\pi_1(A_1, x_0)$ *et* $\pi_1(A_2, x_0)$ *le long de* $\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)$.

Démonstration. Démontrons la surjectivité de Φ. Pour cela, soit $f : I \longrightarrow X$ un lacet basé en x_0. $I = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$ donc, par compacité de I et par lemme de Lebesgue, il existe une partition $0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = 1$ telle que $f([s_{i-1}; s_i]) \subset A_i$ pour tout i, où A_i est un certain A_α. On pose, pour tout i, $f_i = f_{|[s_{i-1}; s_i]}$, qui est donc un chemin dans A_i par ce qui précède. Nous avons alors par construction $f = f_1. \dots .f_m$.

Par hypothèse, les ensembles $A_i \cap A_{i+1}$ sont connexes par arcs. Il existe donc $g_i : I \longrightarrow A_i \cap A_{i+1}$ un chemin de x_0 vers $f(s_i)$, puisque x_0 appartient à tous les A_α. On considère alors un nouveau lacet :

$$(f_1.\overline{g_1}).(g_1.f_2.\overline{g_2}). \dots .(g_{m-1}.f_m)$$

Alors, par construction, ce lacet est bien sûr homotope à f. De plus, toujours par construction, chacun des termes dans une parenthèse corresponds à un lacet dans un A_α. Ainsi, $[f_1.\overline{g_1}].[g_1.f_2.\overline{g_2}]. \dots .[g_{m-1}.f_m]$ est un élément dans le produit libre $*_{\alpha \in A} \pi_1(A_\alpha)$, et son image par Φ est $[f]$. Ceci démontre alors la surjectivité de Φ.

On suppose maintenant que toutes les intersections de trois A_α soit connexe par arcs. On aimerait démontrer que N est bien le noyaux de Φ. Il sera nécessaire, pour cela, d'introduire quelques terminologies. Soit $[f] \in \pi_1(X)$. On appelle factorisation de f tout produit formel $[f_1] \dots [f_k]$ avec :

- $\forall i \in [\![1; m]\!]$, f_1 lacet basé en x_0 dans un certain A_α noté A_i.
- f homotope à $f_1. \dots .f_k$.

De plus, deux factorisation de f seront dites équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre en faisant ces opérations ou leur inverse :

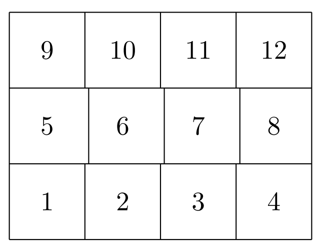
- Assembler $[f_i][f_{i+1}]$ en un seul $[f_i.f_{i+1}]$ si f_i et f_{i+1} sont deux lacets dans un même A_α

- Si f_i est un lacet dans $A_\alpha \cap A_\beta$, voir sa classe comme un élément de $\pi_1(A_\alpha)$ au lieu de le voir comme un élément de $\pi_1(A_\beta)$.

Il est ainsi aisé de voir que nous avons définit une relation d'équivalence sur l'ensemble de tels produits formels. Remarquons à présent que la première combinaison ne change pas l'élément prit au départ dans $*_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)$. La deuxième combinaison, elle, ne change pas l'élément, mais cette fois-ci dans $Q = *_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)/N$ par définition de N. Donc deux factorisations équivalentes donnent le même élément dans $*_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)/N$.

Si on arrive à montrer que l'application induite par Φ de Q dans $\pi_1(X)$ est injective, alors cela montrera que le noyau de Φ est exactement N. Soient alors $[f_1]$ ... $[f_k]$ et $[f_1']$ ... $[f_l']$ deux factorisations de f. Les lacets $f_1. \ldots .f_k$ et $f_1'. \ldots .f_l'$ sont donc homotopes (car homotopes à f). Soit alors $F : I \times I \longrightarrow X$ une homotopie entre ces deux lacets.

Toujours par compacité et continuité de F, il existe $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ deux subdivisions de I telles que pour tout rectangle $R_{ij} = [s_{i-1}; s_i] \times [t_{i-1}; t_i]$, $F(R_{ij}) \subset A_{ij}$ où A_{ij} est un certain A_α. En fait, puisque les A_α sont ouverts, on peut choisir les rectangles tels que au plus trois d'entre eux se rencontrent. Ceci peut se traduire sur le dessin suivant par une perturbation horizontale :



On numérote alors de gauche à droite, de bas en haut les rectangles $R_1, \ldots, R_{mn}$. Puisque F est une homotopie de chemin, pour tout chemin $\gamma : I \longrightarrow I \times I$ allant du côté gauche au côté droit de $I \times I$ (ce qui peut se traduire mathématiquement par : $\gamma(0) \in \{0\} \times I$ et $\gamma(1) \in \{1\} \times I$), $F \circ \gamma$ est un lacet basé en x_0. On note alors γ_r le chemin dans $I \times I$ qui sépare les r premiers rectangles des autres. Ainsi, γ_0 sera le côté bas du carré, et γ_{mn} le côté haut du carré.

Soit v un coin d'un des R_r, avec $F(v) \neq x_0$. Par construction, $F(v)$ appartient à une intersection d'au plus trois ensembles du type A_α, qui est connexe par arcs. On peut donc trouver un chemin g_v de x_0 à $F(v)$. Donc, par le même argument que pour la surjectivité de Φ, nous obtenons une factorisation de $F \circ \gamma_r$. A équivalence près, elle ne dépends pas du point de vu que nous adoptons sur l'image des lacets, puisque nous avons vu que voir un lacet dans $\pi_1(A_\alpha)$ donnait le même résultat que le voir dans $\pi_1(A_\beta)$ dans le quotient. Ainsi, sur les segments des rectangles en commun à γ_r et γ_{r+1}, l'image donne une factorisation équivalente. Pour ce qui est du cas du rectangle R_{r+1} où les deux chemins diffèrent, nous pouvons trouver une homotopie de γ_r vers γ_{r+1} en "poussant" γ_r vers γ_{r+1} en restant dans le rectangle R_{r+1}. Ainsi, dans la factorisation de l'image de ces deux lacets, nous pouvons choisir pour le rectangle R_{r+1} de voir nos lacets dans le A_α correspondant à R_{r+1}. Nous obtenons alors le même terme dans la factorisation. Par ce qui précède, on en déduit ainsi que leur factorisations associées est équivalente.

En particulier, $F \circ \gamma_0$ et $F \circ \gamma_{mn}$ ont des factorisations équivalentes. Or, nous pouvons nous arranger pour que la factorisation donnée par γ_0 soit équivalente à la factorisation $[f_1]$ ... $[f_k]$. En effet, pour cela, nous reprenons ce que nous avons dit tout à l'heure, sauf que cette fois-ci, le chemin g_v liant le sommet v sur le côté bas du carré devra être non seulement dans les deux rectangles du dessin dont v est le sommet, mais aussi dans le A_α correspondant au f_i qui admet v dans son domaine. Ce f_i est unique si v est (en omettant la première coordonnée) dans l'intérieur d'un des intervalles de la première subdivision de I. Dans le cas où il est aux extrémités, alors, puisque f_i est un lacet basé en x_0, $F(v) = x_0$. Il est donc inutile de déplacer le point. De cette façon, on obtient une factorisation de $F \circ \gamma_0$ équivalente à celle de f_1 ... f_k. Il en est de même bien sûr pour $F \circ \gamma_{mn}$ à qui on donne une factorisation équivalente à celle de f'_1 ... f'_l. Ainsi, par ce qui précède, les deux factorisations de f sont équivalentes, ce qui prouve l'injectivité de Φ.

□

1.5.2.2 Quelques applications du théorème

Commençons par un premier résultat intéressant pour le calcul de certains groupes fondamentaux :

Corollaire 1.5.2. *Soient X un espace topologique connexe par arcs s'écrivant de la forme $X = A_1 \cup A_2$, où A_1 et A_2 sont des ouverts simplement connexes et tels que $A_1 \cap A_2$ soit connexe par arcs.*
Alors X est simplement connexe.

Démonstration. Tout d'abord, X est connexe par arcs. Ensuite, pour montrer que son groupe fondamental est trivial, on applique le théorème de Van Kampen, avec $\Lambda = \{1; 2\}$. Les hypothèses s'appliquent, donc $\pi_1(X) \cong (\pi_1(A_1) * \pi_1(A_2))/N$ où N est le sous-groupe normalement engendré par les éléments de la forme $i_{12}(\omega)i_{21}(\omega)^{-1}$. Dans ce cas, puisque A_1 et A_2 sont simplement connexes, leur groupe fondamental est trivial, et donc il en est de même pour $\pi_1(X)$ par isomorphisme.
X est donc simplement connexe.

□

Ceci nous permet alors de calculer le groupe fondamental de la sphère de dimension n :

Proposition 1.5.4. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \pi_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$

Démonstration. On écrit $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}\backslash\{N\}) \cup (\mathbb{S}^n\backslash\{S\})$, où N est le pôle nord de la sphère, à savoir le $n+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $S = -N$. Nous avons alors écrit $\mathbb{S}^n$, qui est connexe par arcs, sous la forme d'une union de deux ouverts simplement connexes, puisque ces ouverts sont, par les projections stéréographiques, homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ qui est simplement connexe. De plus, leur intersection est $\mathbb{S}^n \backslash \{N; S\}$ qui est bien connexe par arcs puisque homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ privé d'un point, qui est connexe par arcs car $n \geqslant 2$. Par ce qui précède, $\mathbb{S}^n$ est donc simplement connexe, et son groupe fondamental est donc trivial.

□

Pour étudier une application très intéressante de ce théorème pour la suite, nous allons avoir besoin d'une nouvelle notion.

Définition 1.5.4. *Soit Λ un ensemble discret d'indice et soit $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'ensembles.*
On appelle coproduit de cette famille (ou réunion disjointe) l'ensemble :

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{(x; \lambda) | x \in X_\lambda\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \times \{\lambda\}$$

Cette notion permet notamment de généraliser la réunion disjointe d'un ensemble de parties d'un espace ambiant. Elle permettra non seulement de distinguer deux ensembles qui ne sont pas forcément disjoints (par exemple $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$), mais aussi de "réunir", d'une certaine façon, des ensembles qui ne sont pas nécessairement dans le même espace ambiant.

Remarquons de plus que nous pouvons aisément définir une topologie sur un coproduit. Pour $\lambda \in \Lambda$, on note $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ l'injection canonique qui à $x \in X_\lambda$ associe $(x; \lambda)$. On définit les ouverts U du coproduit comme étant les ensembles tels que $\forall \lambda \in \Lambda$, $i_\lambda^{-1}(U)$ est ouvert dans X_λ. De plus, la donnée de f une application sur le coproduit est équivalente à la donnée des applications "partielles" $f \circ i_\lambda = f_\lambda$.

Proposition 1.5.5. *Soient $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'espaces topologiques et Y un autre espace topologique. Soit $f : \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow Y$ une application.*

Alors f est continue si et seulement si $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ est continue.

Démonstration. Les injections i_λ sont continues par définition de la topologie coproduit. Ainsi, si f est continue, $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ est continue en tant que composée d'application continue.

Réciproquement, supposons que tous les f_λ sont continues. Soit alors $U \subset Y$ un ouvert de Y. Vérifions que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert du coproduit. Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors $i_\lambda^{-1}(f^{-1}(U)) = f_\lambda^{-1}(U)$ est ouvert par hypothèse. Puisque ceci est vrai pour un λ quelconque, $f^{-1}(U)$ est bien ouvert par définition de la topologie coproduit, ce qui montre que f est continue.

□

Définition 1.5.5. *Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque d'ensemble. Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. On définit le bouquet de $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ par :*

$$\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha = (\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence sur le coproduit qui identifie tout les x_α, $\alpha \in A$, dans le coproduit (c'est-à-dire qu'elle identifie en fait les $(x_\alpha;\alpha)$).

On peut, bien sûr, munir un bouquet d'une topologie, qui sera tout simplement la topologie quotient associée à la topologie coproduit.

Lemme 1.5.1. *Soient $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espace topologique et $(A_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous espaces des X_α. Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} A_\alpha$. On suppose que $\forall\alpha \in A$, A_α est un rétracte fort par déformation de X_α.*

Alors le bouquet en x $\bigvee_{\alpha\in A} A_\alpha$ est un rétracte par déformation forte du bouquet $\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha$ en x.

Démonstration. Soient $r_\alpha : X_\alpha \longrightarrow A_\alpha$ les rétractes forts par déformation des A_α. On définit $r : \bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow \bigvee_{\alpha\in A} A_\alpha$ par : $r(\overline{(y;\alpha)}) = \overline{(r_\alpha(y);\alpha)}$. r est bien définit en vu de la relation d'équivalence avec laquelle nous travaillons, car les x_α appartiennent aux A_α. De plus, r vaut l'identité sur le bouquet des A_α par définition.

Soit π la projection canonique du coproduit des X_α dans leur bouquet. Alors $(r \circ \pi \circ i_\alpha)(y) = \overline{(r_\alpha(y);\alpha)}$ qui est une application continue par composée d'applications continues. On en déduit que $r \circ \pi$ est continue, et donc que r est continue.

Enfin, si on note H_α une homotopie de r_α vers id_{X_α} fixant chaque élément de A_α pour tout t, on pose H l'application définie par : $H(\overline{(y;\alpha)};t) = \overline{(H_\alpha(y;t);\alpha)}$. Cette application est bien définie. En effet, si deux couples (y,α) et (y',α') sont équivalents, soit $\alpha = \alpha'$ auquel cas $y = y'$ d'après la relation d'équivalence définie, ce qui ne pose aucun problème de définition, soit $\alpha \neq \alpha'$ et donc $y = x_\alpha$ et $y' = x_{\alpha'}$. Or, Pour tout $t \in I$, pour tout α, $H_\alpha(x_\alpha,t) = x_\alpha$ puisque la rétraction par déformation est forte. Puisque dans le bouquet (x_α,α) et $(x_{\alpha'},\alpha')$ sont identifiés, H est bien définie. C'est de plus une application continue, par composé, qui établit une homotopie forte entre r et id. Le résultat est donc démontré.

□

Corollaire 1.5.3. *Soient $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'ensemble connexe par arcs et $\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha$ leur bouquet en $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Supposons que $\forall\alpha \in A, \exists U_\alpha$ voisinage ouvert de x_α dans X_α*

tel que U_α se rétracte fortement en x_α par déformation.

Alors $\ast_{\alpha\in A}\pi_1(X_\alpha) \cong \pi_1(\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha)$.

Démonstration. On souhaite appliquer le théorème de Van Kampen. Pour cela, nous devons trouver les A_α et montrer que deux ou trois intersections de ces ensembles donnent un ensemble connexe par arcs.

On pose pour cela $A_\alpha = X_\alpha \vee \bigvee_{\beta\in A,\beta\neq\alpha} U_\beta$. Alors, puisque chaque x_β est un rétracte fort par déformation de U_β, X_α est un rétracte fort par déformation de A_α, qui est donc connexe par arcs. Leur groupe fondamental est isomorphe par la proposition 1.3.3.

De plus, l'intersection de deux ou trois des A_α donne le bouquet des U_α, qui se rétracte en un point, et est donc connexe par arcs. Donc, par théorème de Van Kampen, $\ast_{\alpha\in A}\pi_1(A_\alpha)$ est isomorphe à $\pi_1(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha) = \pi_1(\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha)$ par Φ. Sachant que $\pi_1(A_\alpha) \cong \pi_1(X_\alpha)$, on en déduit le résultat.

□

En particulier, nous pouvons appliquer ce corollaire pour un bouquet de cercles, c'est-à-dire $\forall\alpha \in A$, $X_\alpha = \mathbb{S}^1$. En effet, si on prends $x \in \mathbb{S}^1$, un voisinage ouvert suffisant pour appliquer le corollaire est un arc de cercle ouvert distinct de $\mathbb{S}^1$, qui est bien contractile de façon forte (il suffit pour cela de "réduire" progressivement l'intervalle formé par l'arc de cercle jusqu'au point x). On obtient alors, par ce résultat, que le groupe fondamental d'un bouquet de cercle est isomorphe au produit libre de $\mathbb{Z}$ avec lui-même, qui est un groupe libre.

Ainsi, en particulier :

$$\forall n \geqslant 1, \pi_1(\bigvee_{k=1}^{n} \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{F}_n$$

Chapitre 2

Revêtements

Le but de ce chapitre est de définir la notion de revêtement, que nous utiliserons avec ce que nous avons vu sur le groupe fondamental, ainsi que de montrer quelques unes de leurs propriétés. Le but phare de ce chapitre sera notamment de démontrer le théorème de classification des revêtements, qui constitue un analogue à la correspondance de Galois en théorie des corps.

2.1 Relèvements d'applications

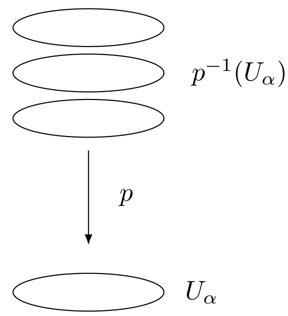
2.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1. *Soit X un espace topologique.*
Un revêtement de X est la donnée d'un ensemble $\widetilde{X}$ et d'une application continue $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tels qu'il existe un recouvrement d'ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X tel que $p^{-1}(U_\alpha)$ est une union disjointe d'ouverts V de $\widetilde{X}$ tels que $p_{|V} : V \longrightarrow U_\alpha$ soit un homéomorphisme.

On introduit aussi certaines terminologies : l'espace X est appelé *base du revêtement*. Les ouverts U_α sont appelés *ouverts trivialisants*, et les V de la définition sont appelés *feuillet au-dessus de U_α*. Pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est appelé *la fibre au-dessus de x*.

Une façon équivalente de définir un revêtement est de dire que $\forall x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que $p^{-1}(U)$ se décompose en réunion disjointe d'ouverts chacun homéomorphes à U via p.

Pour représenter schématiquement le comportement d'un revêtement, on représente en général une "pile d'assiettes" au-dessus d'un ouvert trivialisant de la façon suivante :



En particulier, ce dessin suggère qu'un revêtement agit en fait comme une projection. C'est un cas particulier de ce que nous appelons une *application quotient*, c'est-à-dire une application surjective telle que $U \subset X$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert.

En effet, la surjection provient directement du fait que nous imposons des homéomorphismes entre les ouverts trivialisants U (qui forment par ailleurs un recouvrement de X) et des parties de leur image réciproque. Quant à l'équivalence, le sens direct étant évident par continuité de p, il suffit de montrer la réciproque. Si $p^{-1}(V)$ est ouvert, et que V est inclut dans un ouvert trivialisant U, alors $p^{-1}(V)$ s'écrit comme l'union des $U_i \cap p^{-1}(V)$ où les U_i sont les feuillets au-dessus de U. Ainsi, $U_i \cap p^{-1}(V)$ est un ouvert homéomorphe à V via p, ce qui montre que V est ouvert. Dans le cas général, V s'écrit comme l'union des $V \cap U$ où U est un ouvert trivialisant. Par ce qui précède, V est donc une union d'ouverts, et est donc ouvert.

p est donc une application quotient, et à ce titre se comporte comme une projection, comme notre intuition le sous entendait.

Définition 2.1.2. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement de X. Soit $f : Y \longrightarrow X$ une application continue. On appelle relèvement de f le long de p toute application continue $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ tel que $f = p \circ \widetilde{f}$.*

En d'autres termes, un relèvement $\widetilde{f}$ est une application continue rendant le diagramme suivant commutatif (et qui justifie aussi le terme "relèvement") :

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Lorsque le contexte est bien définit, nous nous autoriserons à dire que $\widetilde{f}$ est un *relèvement* plutôt qu'un "relèvement le long de p".

Théorème 2.1.1. *(de relèvements des homotopies)*
Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement d'un espace topologique X et soit $f_t : Y \longrightarrow X$ une homotopie (d'applications). Supposons qu'il existe un relèvement $\widetilde{f_0}$ de f_0. Alors il existe une unique homotopie $\widetilde{f_t} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ qui relève f_t pour tout t dans I.

Démonstration. La démonstration est similaire dans le cas où $X = \mathbb{S}^1$. En effet, sans le dire, nous avons utilisé le fait que l'application p était un revêtement. Le point important de cette démonstration est notamment la compacité de I, pour appliquer le lemme de Lebesgue.

□

Remarque 2.1.1. *Comme nous l'avons remarqué après le calcul du groupe fondamental du cercle, ce théorème nous donne deux cas particuliers très intéressants pour la suite. Si $Y = \{0\}$, nous obtenons la propriété de relèvement des chemins, qui nous indique que si $f : I \longrightarrow X$ est un chemin basé en x_0, alors pour tout $\widetilde{x_0}$ dans $p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin basé en $\widetilde{x_0}$ qui relève f. Ceci implique en particulier que si f est un chemin constant, $\widetilde{f}$ l'est aussi par unicité.*

Le cas où $Y = I$ nous indique que si f_t est une homotopie de chemin se relevant via une homotopie $\widetilde{f_t}$, alors cette homotopie est une homotopie de chemin. En effet, $\forall t \in I$, $p \circ \widetilde{f_t}(0) = f_t(0) = f(0)$. Donc $t \longmapsto \widetilde{f_t}(0)$ est un relèvement de $f(0)$ qui est un chemin constant. Par la remarque précédente, cette application est donc constante égale à $\widetilde{f}(0)$. On montre de même l'égalité pour $f(1)$.

Proposition 2.1.1. *Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement d'un espace topologique X. Soient $x_0 \in X$ et $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$. On considère $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$. Alors :*

- *p_* est injectif.*
- *$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ corresponds à l'ensemble des classes $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tel que le relèvement $\widetilde{f}$ de f basé en $\widetilde{x_0}$ soit un lacet.*

Démonstration.

- Soit $[\widetilde{f_0}] \in \mathrm{Ker}\ p_*$. Alors $[p \circ \widetilde{f_0}] = [e_{x_0}]$. $f_0 = p \circ \widetilde{f_0}$ est donc homotope à $f_1 = x_0$. Donc par le théorème de relèvements des homotopies, il existe une homotopie $(\widetilde{f_t})_{t\in I}$ qui relève la famille d'homotopie $(f_t)_{t\in I}$ qui relie f_0 à f_1. En particulier, $p \circ \widetilde{f_1} = x_0$. Donc par la remarque précédente, $\widetilde{f_1}$ est un lacet constant. Or, puisque $(\widetilde{f_t})_{t\in I}$ est une homotopie de chemin, $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_1}(0) = \widetilde{f_0}(0) = \widetilde{x_0}$. Donc $\widetilde{f_0}$ est homotope à un lacet constant égal à $\widetilde{x_0}$ ce qui montre l'injectivité.
- Si f est un lacet basé en x_0 tel que son relèvement $\widetilde{f}$ basé en $\widetilde{x_0}$ soit un lacet basé en $\widetilde{x_0}$, alors $[f] = p_*([\widetilde{f}]) \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$. Réciproquement, si $\widetilde{f}$ est un lacet basé en $\widetilde{x_0}$, alors $p_*([\widetilde{f}]) = [p \circ \widetilde{f}]$ et le relèvement de $p \circ \widetilde{f}$ basé en $\widetilde{x_0}$ est exactement $\widetilde{f}$ par unicité, qui est bien un lacet basé en $\widetilde{x_0}$.
  L'égalité est bien démontrée.

□

On remarque que, d'après les propriétés vérifiées par les ouverts trivialisants et leurs feuillets, la quantité $Card(p^{-1}(x))$ est localement constant, où p est un revêtement et x parcourt X. A ce titre, si X est connexe, cette quantité est constante (éventuellement infinie).

Définition 2.1.3. *Soient X un espace topologique connexe et p un revêtement de X. Pour $x \in X$, la quantité $Card(p^{-1}(x))$ est constante et est appelée le degré du revêtement p, ou encore le nombre de feuillets.*

On souhaite à présent connaître la valeur de cette quantité. La proposition suivante nous donne une façon de le calculer dans certains cas :

Proposition 2.1.2. *Soit $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X, x_0)$ un revêtement pointé d'un espace topologique X. On suppose que X et $\widetilde{X}$ sont connexes par arcs. Alors le degré du revêtement est l'indice $[\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))]$.*

Démonstration. On pose $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$. Soit $x_0 \in X$. On considère la relation de congruence à droite de $\pi_1(X, x_0)$ modulo H. On pose :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} (\dfrac{\pi_1(X, x_0)}{H})_d & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ H[g] & \longmapsto & \widetilde{g}(1) \end{array} \right.$$

où $\widetilde{g}$ est l'unique relèvement de g basé en $\widetilde{x_0}$, qui existe par théorème de relèvement des homotopies appliqué aux chemins. Montrons que cette application est bien définie. Soient g un lacet basé en x_0 et $[h] \in H$. Par la proposition précédente, on peut supposer que le relèvement de h basé en $\widetilde{x_0}$ soit un lacet. Alors $\widetilde{h.g}$ est bien définit et est le relèvement de $h.g$ basé en $\widetilde{x_0}$, qui se termine de plus au même point que $\widetilde{g}$. $[h] \in H$ étant quelconque, l'application est donc bien définie.

Montrons que c'est une bijection. Soit $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Puisque $\widetilde{X}$ est connexe par arcs, soit $\widetilde{\gamma}$ un chemin entre $\widetilde{x_0}$ et $\widetilde{x}$. On pose $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$, qui est bien un lacet basé en x_0. Alors $\Phi(H[\gamma]) = \widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{x}$, ce qui montre la surjectivité. Si $\Phi(H[g_1]) = \Phi(H[g_2])$, alors $\widetilde{g_1}(1) = \widetilde{g_2}(1)$. Donc $\widetilde{g_1}.\overline{\widetilde{g_2}}$ est bien définie et est un lacet basé en $\widetilde{x_0}$. Son image par p est donc un représentant d'une classe de H, d'où $[g_1].[g_2]^{-1} = [g_1.\overline{g_2}] \in H$ et donc l'injectivité.

Φ est donc une bijection, et on a alors l'égalité des cardinaux.

□

2.1.2 Existence et unicité d'un relèvement

Si nous avons un revêtement donné, ainsi qu'une application à valeur dans la base du revêtement, qu'est ce qui garantie l'existence d'un relèvement ? Pour trouver une condition nécessaire et suffisante sur cette existence, nous allons avoir besoin d'une nouvelle définition :

Définition 2.1.4. *Soit X un espace topologique.*
X est dit localement connexe par arcs si $\forall x \in X$, pour tout voisinage V de x, il existe $U \subset V$ un voisinage ouvert de x qui est connexe par arcs.

Enonçons à présent le critère de relèvement des applications :

Proposition 2.1.3. *(critère de relèvement)*
Soit $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X, x_0)$ un revêtement d'espaces topologiques pointés. Soit $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ continue avec Y un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors :

$$\exists \widetilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \text{ relèvement de } f \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$$

Démonstration. Si il existe un relèvement $\widetilde{f}$, $f = p \circ \widetilde{f}$ d'où $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$ d'où l'inclusion recherchée.

Réciproquement, on aimerait, supposant l'inclusion, montrer l'existence d'un relèvement $\widetilde{f}$. L'existence d'un tel objet n'est pas évidente. On sait cependant que le relèvement d'un chemin existe toujours, et est unique si on fixe un point de départ. Nous allons donc nous ramener à des chemins. Si nous voulons $f = p \circ \widetilde{f}$, ceci implique que pour tout chemin γ dans Y, $f \circ \gamma = p \circ \widetilde{f} \circ \gamma$. Nous pouvons ainsi nous intéresser au relèvement de $f \circ \gamma$ basé en $\widetilde{x_0}$ pour certains chemins γ. On peut donc espérer une égalité du type $\widetilde{f} \circ \gamma = \widetilde{f \circ \gamma}$. Ainsi, si γ est, disons, un chemin de y_0 à un certain $y \in Y$, cette égalité nous donne $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \gamma}(1)$.

Posons alors :

$$\widetilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ y & \longmapsto & \widetilde{f \circ \gamma}(1) \end{array} \right.$$

où γ est un chemin quelconque de y_0 à y (il en existe un car Y est connexe par arcs), et $\widetilde{f \circ \gamma}$ l'unique relèvement de $f \circ \gamma$ basé en $\widetilde{x_0}$. Ce relèvement existe car $f \circ \gamma$ est un chemin basé en $f(y_0) = x_0$, qui possède un antécédent par p qui est $\widetilde{x_0}$. Le théorème de relèvement nous garantie donc l'existence et l'unicité de $\widetilde{f \circ \gamma}$. Montrons à présent que $\widetilde{f}$ est bien définie. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins de y_0 à y. On a donc que $(f \circ \gamma_1).(f \circ \overline{\gamma_2}) = f \circ (\gamma_1.\overline{\gamma_2})$ est un lacet basé en x_0. Or, par hypothèse $[f \circ (\gamma_1.\overline{\gamma_2})] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ car $\gamma_1.\overline{\gamma_2}$ est un lacet basé en y_0. Avec la remarque $f \circ \overline{\gamma_2} = \overline{f \circ \gamma_2}$, on obtient que $[(f \circ \gamma_1).\overline{(f \circ \gamma_2)}] \in H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$. Donc, d'après la démonstration de la proposition 2.1.2, on a bien $\widetilde{f \circ \gamma_1}(1) = \widetilde{f \circ \gamma_2}(1)$. L'application est donc bien définie.

Montrons à présent que $\widetilde{f}$ est continue. Soit $y \in Y$. Soit U un ouvert trivialisant contenant $f(y)$. Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de $\widetilde{X}$ contenant $\widetilde{f}(y)$ tel que $\widetilde{U}$ soit homéomorphe à U via p. Soit V

un voisinage ouvert connexe par arcs de y tel que $f(V) \subset U$. Le but est de montrer que $\widetilde{f}$ est localement continue, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de y où $\widetilde{f}$ est continue. Une façon de faire serait de parvenir à montrer que $\widetilde{f}(V) \subset \widetilde{U}$ pour pouvoir appliquer l'homéomorphisme inverse de p sur $\widetilde{U}$.

Soit donc $y' \in V$. Nous allons calculer $\widetilde{f}(y')$ en prenant un chemin de y_0 à y' en passant par y. Soient donc γ un chemin de y_0 à y dans Y et η un chemin de y à y', cette fois-ci dans V (puisque V est connexe par arcs). Alors, par définition, $\widetilde{f}(y') = \widetilde{f \circ (\gamma.\eta)}(1) = \widetilde{f \circ \gamma}.\widetilde{f \circ \eta}(1) = \widetilde{f \circ \eta}(1)$. Or, η étant un chemin de V, son image par f est dans $f(V)$ et donc dans U. On peut donc appliquer p^{-1}, qui aura été restreint à U. On obtient alors : $\widetilde{f \circ \eta} = p^{-1} \circ f \circ \eta$. Donc $\widetilde{f}(y') \in \widetilde{U}$. y' étant quelconque dans V, on a donc obtenu que $\widetilde{f}(V) \subset \widetilde{U}$, et donc : $\widetilde{f}_{|V} = p^{-1} \circ f$ qui est continue en tant que composée d'applications continues. $\widetilde{f}$ est donc continue.

Enfin, pour $y \in Y$, soit γ un chemin de y_0 à y. Alors $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \gamma}(1)$ d'où $p \circ \widetilde{f}(y) = f \circ \gamma(1) = f(y)$. $\widetilde{f}$ est donc bien un relèvement de f le long de p. $\widetilde{f}$ envoie de plus y_0 sur $\widetilde{x_0}$ en prenant γ le lacet constant égal à y_0.

□

Nous venons de régler l'une des deux questions les plus fondamentales que se pose un mathématicien dans ce genre de situation ; il s'agit de l'existence. Qu'en est-il à présent de l'unicité ? La proposition suivante nous permet d'assurer l'unicité dans certains cas.

Proposition 2.1.4. *(unicité du relèvement)*
Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement. Soit une application continue $f : Y \longrightarrow X$ ayant deux relèvements $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ qui coïncident en un point.

Si Y est connexe, alors $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.

Démonstration. On pose A l'ensemble des points de Y où les deux relèvements coïncident. Cet ensemble est non vide par hypothèse. Pour montrer que c'est l'espace ambiant, nous allons montrer qu'il est à la fois ouvert et fermé.

Soit $y \in Y$. On note U l'ouvert trivialisant dans lequel il est contenu. Soient $\widetilde{U_1}$ et $\widetilde{U_2}$ deux feuillets au-dessus de U qui contiennent $\widetilde{f_1}(y)$ et $\widetilde{f_2}(y)$ respectivement. Par continuité de $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$, il existe un voisinage ouvert N de y qui s'envoie dans $\widetilde{U_1}$ et $\widetilde{U_2}$ par $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$. Si $\widetilde{f_1}(y) \neq \widetilde{f_2}(y)$, alors $\widetilde{U_1} \neq \widetilde{U_2}$ par injectivité de p sur ces espaces. Ces ouverts sont donc disjoints. Ainsi, $\widetilde{f_1} \neq \widetilde{f_2}$ sur N. Ceci montre alors que si $y \in Y \backslash A$, alors $N \subset Y \backslash A$ d'où A fermé. De même, si $\widetilde{f_1}(y) = \widetilde{f_2}(y)$, alors $\widetilde{U_1} = \widetilde{U_2}$ sinon ils devraient être disjoints, ce qui absurde par l'égalité précédente. Donc $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$ sur N par injectivité de p sur $\widetilde{U_1}$. Donc A est ouvert.

Y étant connexe, $A = Y$ ce qui démontre la propriété.

□

2.2 Classification des revêtements

Le but de cette section est classifier tous les revêtements d'un espace topologique donné. Etant donné que nous nous intéressons à des chemins et des lacets, il est naturel de considérer notre espace au moins localement connexe par arcs. Or, un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. En effet, le sens réciproque étant évident, faisons le sens direct. Les composantes connexes par arcs sont des ensembles ouverts, puisque l'ensemble est localement connexe par arcs. Or, l'ensemble s'écrit comme union disjointes des composantes connexes par arcs, tout en étant connexe. Cette union n'est donc composé que d'un seul terme ; l'ensemble est donc connexe par arcs.

Ainsi, les composantes connexes par arcs et connexes d'un espace localement connexe par arcs sont les même. Nous pouvons donc sans perte de généralité supposer en plus notre espace connexe par arcs (ou de façon équivalente connexe, par ce qui précède). En ce qui concerne les revêtements, nous allons voir ci-après que la locale connexité par arcs de l'espace base donne la locale connexité par arcs de l'espace du revêtement. Nous pouvons alors de même supposer nos revêtements connexe par arcs (ou connexe).

Pour trouver quelle pourrait être la correspondance de Galois, faisons la remarque suivante : si $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X, x_0)$ est un revêtement, le groupe $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ joue un grand rôle dans l'existence des relèvements. Il peut être en particulier naturel de définir une application prenant un tel revêtement et lui associant le groupe H, qui fera l'analogue du groupe de Galois de la théorie des corps.

2.2.1 Revêtement simplement connexe

Puisque la correspondance de Galois est une bijection, nous voulons au moins la surjectivité d'une telle application. Il nous faudra alors faire une hypothèse supplémentaire sur notre espace topologique pour garantir la surjectivité, ce qui nous amène à la nouvelle notion suivante :

Définition 2.2.1. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Pour $x \in X$, on désigne par $\mathcal{O}(x)$ l'ensemble des voisinages ouvert de x. On dit que X est semi-localement simplement connexe si :*

$$\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{O}(x), \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x) \text{ est trivial}$$

Maintenant, étant donné un espace topologique qui est en plus semi-localement simplement connexe, nous pouvons construire un revêtement simplement connexe :

Proposition 2.2.1. *Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs.*
Alors il existe un revêtement simplement connexe de X si et seulement si X est semi-localement simplement connexe.

Démonstration. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement simplement connexe de X. Alors $\forall x \in X, \exists U$ ouvert trivialisant contenant x homéomorphe à un $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ via p. Chaque lacet de U se relève d'un lacet dans $\widetilde{U}$ par homéomorphisme de p sur ces espaces. Or, chaque lacet de $\widetilde{U}$ est homotope au lacet constant dans $\widetilde{X}$, puisque l'espace ambiant est simplement connexe. En composant par p_*, le lacet dans U est donc trivial dans X, d'où X semi-localement simplement connexe.

Réciproquement, le but est de donner une construction explicite d'un tel revêtement. Nous allons pour cela nous fixer un élément $x_0 \in X$. On pose alors :

$$\widetilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma \text{ chemin de X basé en } x_0\}$$

où la classe d'équivalence utilisée ici est celle des homotopies de chemin. On pose aussi :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \longrightarrow & X \\ [\gamma] & \longmapsto & \gamma(1) \end{array} \right.$$

Ceci sera notre revêtement. Il reste à montrer que p et $\widetilde{X}$ vérifient bien les axiomes d'un revêtement.

Remarquons tout d'abord pour cela que p est bien définie, puisque nous considérons des homotopies de chemin. Ainsi, si deux chemins sont homotopes, alors leur extrémité est le même. Donc p est bien définie. Remarquons de plus que p est surjective, puisque X est connexe par arcs. Ceci nous sera utile par la suite.

On note par la suite $\mathcal{O}$ une topologie fixée au départ de X. On pose alors :

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{O} \mid U \text{ connexe par arcs et } \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X) \text{ trivial}\}$$

Cet ensemble forme une base topologique pour $(X, \mathcal{O})$, c'est-à-dire que tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathcal{U}$. En effet, soit U un ouvert de X. Soit $x \in U$. On sait qu'il existe $U_x \in \mathcal{O}$ contenant x tel que l'injection $\pi_1(U_x, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ est triviale, l'espace X étant semi-localement simplement connexe. Ainsi, $U \cap U_x$ est encore un ouvert vérifiant $\pi_1(U \cap U_x, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ trivial. Or, l'espace X est aussi localement connexe par arcs. Donc, pour cet ouvert, il existe $V_x \subset U \cap U_x$ un ouvert de X connexe par arcs contenant

x. De plus, étant connexe par arcs, nous pouvons nous intéresser à n'importe quel point de V_x pour étudier son groupe fondamental, en x par exemple, et on obtient par inclusion que : $\pi_1(V_x, x) \longrightarrow \pi_1(U \cap U_x, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ trivial. Donc $V_x \in \mathcal{U}$ et $V_x \subset U$. Notre ouvert U s'écrit donc comme union d'éléments de $\mathcal{U}$, ce qui montre que ce dernier est une base pour la topologie de X.

De plus, pour $U \in \mathcal{U}$, pour γ un chemin de x_0 dans un point de U, on pose :

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma.\eta] \mid \eta \text{ chemin dans } U \text{ tel que } \eta(0) = \gamma(1)\}$$

Comme le nom l'indique, cet ensemble ne dépends que de la classe de γ.

On aimerait définir une topologie sur $\widetilde{X}$ dont la base serait les ensembles de la forme $U_{[\gamma]}$. Afin de montrer que les unions de tels éléments définissent une topologie sur $\widetilde{X}$, nous allons montrer un petit lemme, qui est le suivant :

$$\forall U \in \mathcal{U}, \forall [\gamma] \in \widetilde{X},\ [\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$$

En effet, si $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, alors il existe η un chemin dans U tel que $\eta(0) = \gamma(1)$ et $[\gamma'] = [\gamma.\eta]$. Ainsi, pour tout θ chemin de U tel que $\theta(0) = \gamma'(1)$, on a l'égalité $[\gamma'.\theta] = [\gamma.(\eta.\theta)]$. Nous obtenons donc l'inclusion $U_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$. L'inclusion réciproque se fait avec l'égalité $[\gamma] = [\gamma'.\bar{\eta}]$.

A présent, avec ce petit lemme démontré, nous pouvons définir une base topologique pour $\widetilde{X}$:

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_{[\gamma]} \mid \gamma \text{ lacet de } x_0 \text{ vers un point de } U \in \mathcal{U}\}$$

Vérifions que cet ensemble engendre bien une topologie. Nous avons $\emptyset = \emptyset_{[e_{x_0}]}$ et $\widetilde{X} = X_{[e_{x_0}]}$, donc ces deux éléments sont dans $\widetilde{\mathcal{U}}$. Montrons à présent la stabilité par intersection fini. Puisque l'intersection est supposée finie, il suffit de montrer la stabilité pour deux éléments. On prends donc deux éléments $U_{[\gamma]}$ et $V_{[\gamma']}$ de $\widetilde{\mathcal{U}}$. Si ces deux ensembles sont disjoints, alors leur intersection est ouvert. Sinon, soit $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. En particulier, $\gamma''(1) \in U \cap V$. X étant localement connexe par arc, et quitte à prendre un ouvert plus petit, on peut trouver un ouvert $W \in \mathcal{U}$ qui contient $\gamma''(1)$ tel que $W \subset U \cap V$. Montrons que $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. Par le lemme, puisque $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$, on a les égalités $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$ et $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma']}$. Sachant que $W \subset U \cap V$, on a : $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ ce qui démontre l'inclusion. Ainsi :

$$U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} = \bigcup_{[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}} W_{[\gamma'']}$$

Les unions d'éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}$ forment donc une topologie sur $\widetilde{X}$.

Nous touchons au but. Il reste à présent de montrer que p définie bien un revêtement et que $\widetilde{X}$ est simplement connexe. Pour cela, remarquons que les éléments de $\mathcal{U}$ forment un recouvrement de X, puisque $\mathcal{U}$ est une base topologique de $(X, \mathcal{O})$. De plus, pour tout $U \in \mathcal{U}$, $p^{-1}(U) = \bigcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}$, où les $[\gamma]$ de l'union sont des classes d'équivalences de chemin de x_0 dans un point de U (ces chemins existes puisque X est connexe par arcs). Cette union est de plus disjointe, puisque, par le lemme, s'il y a un élément dans une intersection de deux éléments de cette réunion, alors ces éléments sont nécessairement égaux. Nous avons donc obtenu une réunion disjointe d'ouverts de $\widetilde{X}$, ce qui montre que nous avons trouvé des potentiels ouverts trivialisants pour ces deux topologies.

Reste à montrer que p restreint à un $U_{[\gamma]}$ définie bien un homéomorphisme. Remarquons alors que $p : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ est surjective puisque U est connexe par arcs. De plus, c'est injectif puisque $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ est trivial. Ainsi, si deux chemins de U partent d'un même point, et arrivent à une même extrémité, ils forment un lacet qui sera homotope au lacet constant. Ces deux chemins seront alors homotopes. p est donc une bijection sur $U_{[\gamma]}$. p est de plus continue par le paragraphe précédent. Enfin, si on prends $V \subset U$, $p(V_{[\gamma]}) = V$ qui est ouvert. p est donc bien un homémorphisme sur $U_{[\gamma]}$ et définit donc bien un revêtement.

Montrons enfin que $\widetilde{X}$ est simplement connexe. Soit pour cela $[\gamma] \in \widetilde{X}$. On définit : $\forall t \in I, \gamma_t = \gamma$ sur $[0; t]$ et constante égale à $\gamma(t)$ sur $[t; 1]$. $t \longmapsto [\gamma_t]$ définie un chemin de $[e_{x_0}]$ à $[\gamma]$, ce qui montre que $\widetilde{X}$ est connexe par arcs. Pour montrer que le groupe fondamental est réduit à un élément, nous pouvons donc nous intéresser au groupe fondamental basé au point $[e_{x_0}]$. Puisque p_* est injective, il suffit pour cela de regarder l'image par p_* de $\pi_1(\widetilde{X})$, qui est représenté par les classes de lacets basés γ en x_0 se relevant de lacets en $[e_{x_0}]$ dans $\widetilde{X}$. Nous avons vu que $t \longmapsto [\gamma_t]$ relève γ, partant de $[e_{x_0}]$. Or, son extrémité est exactement $[\gamma]$. Par homotopie fixé, les extrémités sont les mêmes. Donc $[\gamma] = [e_{x_0}]$. L'image est donc réduit à un élément, ce qui montre que $\widetilde{X}$ est simplement connexe.

Nous avons donc construit un revêtement simplement connexe de X.

□

Remarque 2.2.1. *Ce type de construction constitue ce que nous appellerons plus tard un revêtement universel de X.*

2.2.2 Correspondance de Galois

Nous avons maintenant tout pour attaquer la correspondance de Galois dans le cadre des revêtements. Nous commençons, avant d'énoncer le théorème de classification des revêtements, par une propriété représentant la moitié de la correspondance de Galois, donnant le caractère surjectif de l'application que nous avons définit au début de cette section :

Proposition 2.2.2. *Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$.*
Alors pour tout $H < \pi_1(X, x_0)$ sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$, il existe un revêtement connexe par arcs de X $p : X_H \longrightarrow X$, il existe $\widetilde{x_0} \in X_H$ tel que $p_*(\pi_1(X_H, \widetilde{x_0})) = H$.

Ceci signifie alors qu'à tout sous-groupe du groupe fondamental, on peut trouver un revêtement de l'espace tel l'image de son groupe fondamental par le morphisme induit par le revêtement soit exactement H.

Démonstration. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement construit précédemment. On définit une relation d'équivalence sur $\widetilde{X}$ par :

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff \begin{cases} \gamma(1) = \gamma'(1) \\ [\gamma.\bar{\gamma'}] \in H \end{cases}$$

C'est bien une relation d'équivalence sur $\widetilde{X}$ puisque H est un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$. Soit X_H le quotient de $\widetilde{X}$ par cette relation. Nous désignerons par $\overline{[\gamma]}$ la classe de $[\gamma] \in \widetilde{X}$ dans ce quotient. Remarquons tout d'abord que si $\gamma(1) = \gamma'(1)$, alors $[\gamma] \sim [\gamma']$ si et seulement si pour tout chemin η commençant à $\gamma(1) = \gamma'(1)$, $[\gamma.\eta] \sim [\gamma'.\eta]$. Ceci signifie que pour tout $U \in \mathcal{U}$, si deux points de $U_{[\gamma]}$ et $U_{[\gamma']}$ sont identifiés dans le quotient, alors ces deux ouverts sont les même dans le quotient. Ainsi, l'image de $U_{[\gamma]}$ dans le quotient ne dépends que de la classe d'équivalence de $[\gamma]$ dans X_H. On définit alors :

$$p_H : \left| \begin{array}{ccc} X_H & \longrightarrow & X \\ \overline{[\gamma]} & \longmapsto & \gamma(1) \end{array} \right.$$

qui peut aussi s'écrire : $p = p_H \circ \pi_H$ où π_H est l'application quotient sur X_H.

Par définition de la relation d'équivalence, p passe au quotient. Donc p_H est bien définie. C'est de plus un revêtement de X puisque $\forall U \in \mathcal{U}$, $p_H^{-1}(U) = \bigcup_{\overline{[\gamma]}} \pi_H(U_{[\gamma]})$, où l'union parcoure les classes d'équivalence pour des chemins γ de x_0 vers un point de U. Cette union peut être considérée disjointe par la remarque précédente la définition. Enfin, d'après l'égalité $p = p_H \circ \pi_H$, nous avons $p_{H|\pi_H(U_{[\gamma]})} = p_{|U_{[\gamma]}}$ qui est un homéomorphisme. p_H est donc bien un revêtement.

Enfin, soit $\widetilde{x_0} = \overline{[x_0]}$. Alors pour tout lacet γ en x_0, son relèvement est un chemin de $[x_0]$ vers $[\gamma]$. Donc son relèvement est un lacet si et seulement si $[x_0] \sim [\gamma]$ si et seulement si $[\gamma] \in H$. L'image du groupe fondamental par le morphisme induit est donc H. Enfin, $X_H = \pi_H(\widetilde{X})$ est connexe par arcs en tant qu'image continue d'un connexe par arcs, ce qui démontre la proprosition.

□

Nous avons alors démontré que tout sous-groupe du groupe fondamental admettait un revêtement dont l'image du groupe fondamental par le morphisme induit est le sous-groupe dont nous nous sommes munis. Nous aimerions cependant maintenant une injectivité, c'est-à-dire que le sous-groupe que nous avons pris caractérise entièrement le revêtement que nous avons trouvé à la proposition précédente.

Cependant, rien n'empêche plusieurs revêtements d'avoir le même groupe H. Ceci nous amène alors à la notion suivante :

Définition 2.2.2. *Soient $p_1 : \widetilde{X_1} \longrightarrow X$ et $p_2 : \widetilde{X_2} \longrightarrow X$ deux revêtements de X un espace topologique. On appelle morphisme de revêtements toute application $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$ continue telle que $p_1 = p_2 \circ f$.*

Dans le cas où les revêtements sont pointés, c'est-à-dire : $p_1 : (\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}) \longrightarrow (X, x)$ et $p_2 : (\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2}) \longrightarrow (X, x)$, on appelle morphisme de revêtements pointés tout morphisme de revêtement f tel que $f(\widetilde{x_1}) = \widetilde{x_2}$.

Dans le cas où f est un homéomorphisme, on dit que f est un isomorphisme de revêtements, et donc que les revêtements sont isomorphes.

En particulier, si $\widetilde{X_1} = \widetilde{X_2}$, tout morphisme de revêtements est appelé *endormorphisme de revêtements*. Dans le cas où c'est un isomorphisme, on l'appelera *automorphisme de revêtements*.

Ce qui nous intéressera plus particulièrement sera en particulier l'existence ou non d'un isomorphisme de revêtements entre deux revêtements. De tels morphismes préservent la structure de revêtements, ce qui permet de les identifier.

Remarque 2.2.2. *Il est intéressant de remarquer que, bien-sûr, toute composée de morphismes de revêtement est encore un morphisme de revêtement, et que l'inverse d'un isomorphisme de revêtement est encore un morphisme de revêtement.*
Ainsi, la relation "être isomorphe (pointé)" entre deux revêtements définit trivialement une relation d'équivalence sur l'ensemble des revêtements d'un espace topologique X. Nous noterons $[p]$ la classe d'équivalence d'isomorphisme d'un revêtement p, et $[p]_{pt}$ la classe d'équivalence d'isomorphisme pointé de p.

Avant de continuer, remarquons que le critère de relèvements, très important, s'applique dans le cas où l'espace de départ de notre application à relever est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Puisque nous allons travailler avec des revêtements connexe par arcs, il ne reste qu'à voir que la locale connexité par arcs est héritée par revêtement grâce à l'espace de base :

Lemme 2.2.1. *Soient X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement.*
Alors $\widetilde{X}$ est localement connexe par arcs.

Ainsi, notre critère de relèvement, dans notre étude, s'appliquera toujours dans notre espace au-dessus de la base du revêtement.

Démonstration. Soient $x \in \widetilde{X}$ et $\widetilde{V}$ un ouvert de $\widetilde{X}$ contenant x. On note U un ouvert trivialisant de X contenant $p(x)$, et $\widetilde{U}$ l'ouvert de $\widetilde{X}$ homéomorphe à U via p qui contient x.

Intéressons nous à l'ouvert $\widetilde{V} \cap \widetilde{U}$. p étant un homéomorphisme sur $\widetilde{U}$, l'image $p(\widetilde{V} \cap \widetilde{U}) \subset U$ est ouvert, et contient $p(x)$. Or, X est localement connexe par arcs, donc il existe un voisinage ouvert $W \subset p(\widetilde{V} \cap \widetilde{U})$ de $p(x)$ dans X qui est connexe par arcs. Ainsi, par homéomorphisme, $p^{-1}(W) \subset \widetilde{V} \cap \widetilde{U} \subset \widetilde{V}$ est aussi un ouvert connexe par arcs contenant x, ce qui démontre la locale connexité par arcs de $\widetilde{X}$.

□

Proposition 2.2.3. *Soit X espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soient $p_1 : (\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}) \longrightarrow (X, x_0)$ et $p_2 : (\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2}) \longrightarrow (X, x)$ deux revêtements pointés connexe par arcs de X.*
Alors p_1 est isomorphe pointé à p_2 si et seulement si $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1})) = p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2}))$.

Démonstration. Le sens direct se faisant sans difficulté, démontrons le sens réciproque. Si $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1})) = p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2}))$, alors, par le critère des relèvements, il existe $\widetilde{p_1} : (\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1}) \longrightarrow (\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2})$ et $\widetilde{p_2} : (\widetilde{X_2}, \widetilde{x_2}) \longrightarrow (\widetilde{X_1}, \widetilde{x_1})$ tels que $p_1 = p_2 \circ \widetilde{p_1}$ et $p_2 = p_1 \circ \widetilde{p_2}$. Nous avons donc, en particulier, $p_1 = p_1 \circ (\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1})$. $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}$ est donc un relèvement de p_1 le long de p_1. Mais l'identité est aussi un relèvement de p_1 le long de p_1. De plus, $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}$ fixe $\widetilde{x_1}$. $\widetilde{X_1}$ étant connexe, et ces relèvements coïncidant en un point, on obtient $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1} = id$. On a de même l'égalité inverse, ce qui montre que $\widetilde{p_1}$ est bijectif d'inverse $\widetilde{p_2}$. C'est donc bien un isomorphisme pointé de revêtements entre p_1 et p_2.

□

Nous avons remarqué jusqu'ici que les résultats peuvent légèrement varier suivant si nous considérons des morphismes pointés ou non. Une façon très simple de le voir serait de considérer le théorème de relèvement des homotopies dans le cas des chemins. Si nous ne supposons pas de point de départ, le relèvement d'un chemin n'est clairement pas unique en général. Par contre, fixer un point de départ guarantit l'unicité.

Dans le contexte de la situation précédente, nous remarquons que si nous considérons des morphismes pointés, et donc des classes d'équivalence d'isomorphismes pointés, alors les groupes induits par les revêtements sont exactement les mêmes. Qu'en est-il si nous considérons les classes non pointés ?

C'est pourquoi la propriété suivante, qui est en fait la correspondance de Galois dans le cas des revêtements, est en deux parties, suivant si nous prenons l'une ou l'autre des classes d'équivalence.

Théorème 2.2.1. *(classification des revêtements)*

Soit X un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors les applications suivantes sont des bijections :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \{[p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X,x)]_{pt} \mid p \text{ revêtement connexe par arc}\} & \longrightarrow & \{H \mid H < \pi_1(X,x)\} \\ [p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X,x)]_{pt} & \longmapsto & p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) \end{array} \right.$$

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \{[p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X,x)] \mid p \text{ revêtement connexe par arc}\} & \longrightarrow & \{Conj(H) \mid H < \pi_1(X,x)\} \\ [p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X,x)] & \longmapsto & Conj(p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))) \end{array} \right.$$

où les $Conj$ désignent les classes de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$.

Démonstration. Par la propriété précédente, nous avons déjà démontré que la première application est bien définie et injective. La surjectivité vient de la proposition 2.2.2.

Pour φ, montrons tout d'abord que l'application est bien définie. Pour cela, fixons tout d'abord un revêtement $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X,x)$. Supposons que $p' : (\widetilde{X}', \widetilde{x_0}') \longrightarrow (X,x)$ soit un autre revêtement isomorphe (non pointé) à p. On aimerait alors trouver un lien entre les deux groupes $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ et $p'_*(\pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x_0}'))$. Pour être précis, pour montrer que φ est bien définie, nous voulons montrer qu'ils sont conjugués. Soit alors $f : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ un homéomorphisme vérifiant $p' = p \circ f$. On observe alors par cette égalité que $f(\widetilde{x_0}') \in p^{-1}(x)$. Ainsi, f peut-être considéré comme un isomorphisme pointé $f : (\widetilde{X}', \widetilde{x_0}') \longrightarrow (\widetilde{X}, f(\widetilde{x_0}'))$ entre les revêtements pointés $p' : (\widetilde{X}', \widetilde{x_0}') \longrightarrow (X,x)$ et $p : (\widetilde{X}, f(\widetilde{x_0}')) \longrightarrow (X,x)$. On en déduit alors que $p'_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, f(\widetilde{x_0}')))$ d'après 2.2.3.

Ainsi, pour connaître tous les éléments de la classe d'équivalence d'isomorphisme non pointé de p, il suffit de regarder ce qui se passe si nous changeons le point-base de p. Ainsi, pour démontrer le côté définie de φ, il suffit de montrer que changer le point-base de p revient à conjuguer $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$. Soient $\widetilde{x_1} \in p^{-1}(x)$ et $\widetilde{\gamma}$ un chemin de $\widetilde{x_0}$ à $\widetilde{x_1}$, qui existe car $\widetilde{X}$ est connexe par arcs. On pose alors $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$ et $g = [\gamma]$. Soient $H_i = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_i}))$, $i = 0, 1$. Alors $g^{-1} H_1 g \subset H_0$. En effet, si $\widetilde{f}$ est un lacet basé en $\widetilde{x_0}$, alors $[\overline{\gamma}][p \circ \widetilde{f}][\gamma] = [p \circ (\overline{\widetilde{\gamma}}.\widetilde{f}.\widetilde{\gamma})] \in H_0$ car $\overline{\widetilde{\gamma}}.\widetilde{f}.\widetilde{\gamma}$ est un lacet basé en $\widetilde{x_1}$. L'inclusion réciproque se faisant de même, on a égalité entre ces deux groupes.

Ainsi, nous venons de montrer que changer le point-base revient à conjuguer H_0 ce qui montre que φ est définie. L'application est de plus surjective par la première bijection et par ce qui a été dit juste avant. Enfin, elle est injective car si $H_1 = g^{-1} H_0 g$, et que l'on note γ un lacet basé en x représentant g, et $\widetilde{\gamma}$ son unique relevé basé en $\widetilde{x_0}$, alors, par le même principe que précédemment, cela revient à changer $\widetilde{x_0}$ par $\widetilde{x_1} = \widetilde{\gamma}(1)$.

$\square$

2.3 Transformations de revêtements

Dans cette section, nous allons étudier une catégorie particulière de revêtements, et plus précisément de morphismes de revêtement, dont l'étude s'approchent un peu plus de l'étude du groupe de la théorie de Galois des corps.

2.3.1 Revêtements galoisiens

La première définition ne fait que de regarder les morphismes de revêtements, dans le cas particulier où nous nous munissons des deux mêmes revêtements.

Définition 2.3.1. *Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement. On appelle transformation de revêtement tout isomorphisme de revêtement $f : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ tel que $p = p \circ \widetilde{f}$.*

On voit tout de suite que cela a une certaine similitude avec l'étude du groupe de Galois dans la théorie des corps. En effet, le groupe de Galois d'une extension de corps $i : K \longrightarrow L$ est l'ensemble des automorphismes f de L vérifiant $f \circ i = i$, autrement dit l'ensemble des automorphismes stabilisant K. Ici, l'injection i jouerait le rôle du revêtement p. Les deux égalités peuvent paraître surprenantes, puisqu'elles ne se ressemblent pas tout à fait. Néanmoins, on peut comprendre la différence entre les deux en observant que lorsque nous étudions la théorie de Galois des corps, nous partons d'un corps K que l'on "grossit", en l'injectant dans un corps L qui est donc plus gros. Dans la théorie des revêtements, nous faisons l'opération inverse ; étant donné un espace topologique X, nous trouvons un espace $\widetilde{X}$ plus gros muni cette fois-ci d'une surjection $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ qui sera en fait le revêtement.

Remarque 2.3.1. *L'ensemble des transformations de revêtement forme trivialement un groupe pour la composition noté $G(\widetilde{X})$ ou $Aut(\widetilde{X})$.*

Si nous nous souvenons de ce qu'est une extension galoisienne, un résultat important est que si nous avons une extension de décomposition $i : K \longrightarrow L$ d'un polynôme P irréductible sur K, alors le groupe de Galois de cette extension agit transitivement sur l'ensemble des racines de P. La définition suivante reprends de façon similaire cette idée pour définir les revêtements galoisiens.

Définition 2.3.2. *Un revêtement $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ connexe est dit galoisien (ou régulier, ou normal) si :*

$$\forall x \in X, \forall (\widetilde{x}, \widetilde{x}') \in p^{-1}(x)^2, \exists f \in Aut(\widetilde{X}), f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$$

Le revêtement naturel décrit au chapitre précédent du cercle $\mathbb{S}^1$ est un exemple de revêtement normal.

Il existe des variantes pour la définition d'un revêtement galoisien. Dans certaines définitions, le revêtement doit être supposé connexe par arcs. Parfois, il n'y a même aucune hypothèse de connexité. Néanmoins, l'hypothèse de connexité permet des caractérisations très intéressantes que certains espaces ne vérifieront pas. En particulier, la propriété suivante justifie le nom "normal" donné parfois à ce type de revêtement :

Proposition 2.3.1. *Soit $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow (X, x_0)$ un revêtement connexe d'un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. On pose $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$. Alors :*

$$p \text{ normal} \iff H \lhd \pi_1(X, x_0)$$

De plus, si on note $N_{\pi_1(X,x_0)}(H)$ le normalisateur de H dans $\pi_1(X, x_0)$, alors :

$$G(\widetilde{X}) \cong \frac{N_{\pi_1(X,x_0)}(H)}{H}$$

En particulier, si p est un revêtement galoisien, alors $G(\widetilde{X}) \cong \dfrac{\pi_1(X)}{p_*(\pi_1(\widetilde{X}))}$.

Avant de démontrer cette proposition, remarquons que nous allons utiliser ce qui a été étudié à la section d'avant, à savoir la classification des revêtements (plus particulièrement sa démonstration). Nous rappelons que, puisque X est supposé localement connexe par arcs, il en est de même pour $\widetilde{X}$. Ainsi, l'espace est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. Nous pouvons donc librement appliquer ce que nous avons vu précédemment dans le cas où il sera supposé connexe.

Démonstration. Soit $\widetilde{x_1}$ un antécédent par p de x_0. On a vu dans la section précédente que changer le point-base $\widetilde{x_0}$ en $\widetilde{x_1}$ revient à conjuguer H par $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ayant pour relèvement $\widetilde{\gamma}$ un chemin de $\widetilde{x_0}$ à $\widetilde{x_1}$. Ainsi, $[\gamma] \in N_{\pi_1(X,x_0)}(H) \iff p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_1})) \iff \exists f \in G(\widetilde{X}), f(\widetilde{x_0}) = \widetilde{x_1}$ d'après la propriété 2.2.3. $[\gamma]$ étant quelconque, on a que p est normal si et seulement si $H \lhd \pi_1(X, x_0)$.

Soit :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} N_{\pi_1(X,x_0)}(H) & \longrightarrow & G(\widetilde{X}) \\ [\gamma] & \longmapsto & \tau_{[\gamma]} \end{array} \right.$$

où, en posant $\widetilde{\gamma}$ l'unique relèvement de γ basé en $\widetilde{x_0}$, on note $\widetilde{x_1} = \widetilde{\gamma}(1)$, et $\tau_{[\gamma]}$ l'unique transformation de revêtement tel que $\tau_{[\gamma]}(\widetilde{x_0}) = \widetilde{x_1}$. Cette application est bien définie, puisque nous prenons un élément dans le normalisateur de H. Ainsi, par le premier point détaillé dans la démonstration, on peut trouver une transformation de revêtement de $\widetilde{x_0}$ à $\widetilde{x_1}$. Cette application est aussi unique puisque le revêtement est supposé connexe. Donc deux transformations de revêtement prenant la même valeur en $\widetilde{x_0}$ sont égaux.

Montrons que φ est un morphisme. Soient $[\gamma]$ et $[\gamma']$ deux éléments du normalisateur de H, d'images respectives τ et τ' par φ. On conserve les notations $\widetilde{x_0}$, $\widetilde{x_1}$ et $\widetilde{\gamma}$ précédentes pour γ, et on pose $\widetilde{\gamma}'$ l'unique chemin relèvement de γ' basé en $\widetilde{x_0}$, et $\widetilde{x_1}' = \widetilde{\gamma}'(1)$. Alors, $\widetilde{\gamma}.(\tau \circ \widetilde{\gamma}')$ est un relèvement de $\gamma.\gamma'$, car $p \circ \tau = p$. Or, ce relèvement est un chemin de $\widetilde{x_0}$ à $\tau(\widetilde{x_1}') = \tau \circ \tau'(\widetilde{x_0})$. On a donc bien $\varphi([\gamma.\gamma']) = \varphi([\gamma]) \circ \varphi([\gamma'])$. De plus, ce morphisme est surjectif par les équivalences précédemment démontrées au début de la démonstration. Son noyaux est composé des lacets γ dont leur relèvement basé en $\widetilde{x_0}$ est un lacet, ce qui décrit exactement H. Le premier théorème d'isomorphisme nous donne donc directement le résultat.

□

Définition 2.3.3. *Soit Y un espace topologique connexe et soit G un groupe.*

- *Une action par homéomorphisme de G sur Y est la donnée d'un morphisme de groupe $\rho : G \longrightarrow Homeo(Y)$. On note alors : $\forall g \in G, \forall y \in Y, g.y = \rho(g)(y)$.*
  On appelle alors orbite d'un élément $y \in Y$ l'ensemble $G.y = \{g.y \mid g \in G\}$.

- *On dit que l'action est proprement discontinue (on dit aussi que c'est une action de revêtement) si pour tout $y \in Y$, il existe un ouvert U de Y contenant y tel que $\forall (g_1; g_2) \in G^2$, $g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1.U \cap g_2.U = \emptyset$.*

Remarque 2.3.2. *La relation "être dans la même orbite" définit une relation d'équivalence dont le quotient sera noté Y/G.*

Proposition 2.3.2. *Soit G un groupe qui agit par homémorphisme sur un espace topologique connexe Y. On suppose que l'action est proprement discontinue.*

- *La projection canonique $p : Y \longrightarrow Y/G$ définit un revêtement galoisien de Y/G pour la topologie quotient. Dans ce cas, on a $G = Aut(Y)$.*

- *Si Y est localement connexe par arcs, alors :*

$$G \cong \frac{\pi_1(Y/G)}{p_*(\pi_1(Y))}$$

Démonstration. Soit U un ouvert de Y tel que $g_1.U \cap g_2.U = \emptyset$ si $g_1 \neq g_2$. Il en existe puisque l'action est proprement discontinue. Alors, en posant $V = p(U)$ nous avons $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} g.U$

qui est ouvert. Donc $p(U)$ est ouvert. L'union est de plus disjointe, par hypothèse sur U. De plus, chacun de ces ouverts est homéomorphe via p à U, l'action étant une action par homémorphisme. Enfin, les ouverts V ainsi construits forment un recouvrement de Y/G car l'action est proprement discontinue. p définit donc bien un revêtement.

Montrons qu'il est galoisien. Soit $G.x \in Y/G$. Soient $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in p^{-1}(G.x)$. Alors $\exists g_1, g_2 \in G, \widetilde{x_1} = g_1.x$ et $\widetilde{x_2} = g_2.x$. On en déduit alors que $(g_2 g_1^{-1}).\widetilde{x_1} = \widetilde{x_2}$. On note ρ l'homéomorphisme induit par l'élément $g_2 g_1^{-1}$ de G par l'action. Alors $p \circ \rho = p$ et est un homéomorphisme, d'où $\rho \in G(Y)$. De plus, $\rho(\widetilde{x_1}) = \widetilde{x_2}$. Donc p est bien un revêtement galoisien.

Nous avons déjà, par ce qui précède, $G \subset G(Y)$. Soit maintenant $f \in G(Y)$. $p = p \circ f$ d'où $\forall y \in Y, G.f(y) = G.y$. Donc $\forall y \in Y, \exists g_y \in G, f(y) = g_y.y = \rho_y(y)$ où ρ_y est l'homémorphisme induit par l'action de g_y sur Y. Donc f et ρ_y sont deux relèvements de p qui coïncident en un point. Y étant connexe, $f = \rho_y$ d'où $f \in G$, ce qui établit l'égalité.

Enfin, le dernier point de la proposition est directe par la proposition précédente et par les deux points précédemment montrés durant cette démonstration.

□

Remettons alors ces résultats que nous venons de démontrer ensemble. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement connexe. Alors $G(\widetilde{X})$ agit de façon proprement discontinue sur $\widetilde{X}$. En effet, soit $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$ ouvert se projetant homéomorphiquement via p sur l'ouvert trivialisant $U \subset X$. Alors si $g_1(\widetilde{U}) \cap g_2(\widetilde{U}) \neq \emptyset$ avec $g_1, g_2 \in G(\widetilde{X})$, il existe $\widetilde{x_1}$ et $\widetilde{x_2}$ dans $\widetilde{U}$ tels que $g_1(\widetilde{x_1}) = g_2(\widetilde{x_2})$. Ceci implique que $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in p^{-1}(x)$ pour un certain $x \in X$ et sont soit égaux, soit dans deux feuillets différents de la fibre de x. Puisqu'ils appartiennent tout deux à $\widetilde{U}$, il s'en suit qu'ils sont égaux, et que $g_1^{-1} g_2$ fixe un point. Par critère d'unicité, $g_1 = g_2$.

Ainsi, étant donné un revêtement galoisien $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, avec le groupe $G = G(\widetilde{X})$, on observe par la proposition précédente que la projection canonique $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}/G$ est aussi un revêtement galoisien, de groupe G. Cette proposition identifie donc les revêtements galoisiens avec les revêtements du type $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}/G$.

2.3.2 Revêtements universels

Une catégorie très particulière de revêtements galoisiens sont les revêtements universels. Ce sont des revêtements donnant des résultats assez remarquable grâce à la correspondance de Galois, qui va montrer qu'un revêtement universel d'un espace topologique est en fait, dans un certain sens, le plus gros revêtement que nous puissions trouver.

Avant de définir un tel objet, nous allons voir une façon de traduire le fait qu'un revêtement est "plus gros" qu'un autre avec le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit X un espace localement connexe et soient $p : \widetilde{X_1} \longrightarrow X$ et $q : \widetilde{X_2} \longrightarrow X$ deux revêtements. Soit $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$ un morphisme de revêtement.*

Alors $f : \widetilde{X_1} \longrightarrow \widetilde{X_2}$ *est un revêtement.*

Démonstration. Soit $y \in \widetilde{X_2}$. Le but est de trouver un voisinage de y trivialisant pour f. Soit pour cela $z = q(y)$. On choisit U un ouvert de X connexe contenant z et trivialisant pour p et q. Un tel ouvert existe puisque l'espace est supposé localement connexe, et p et q sont des revêtements. On peut donc trouver un tel ouvert, quitte à en prendre un plus petit. Soit V le feuillet au-dessus de U le long de q contenant y. Nous allons montrer que V est un ouvert trivialisant pour f.

On note $(U_\alpha)_\alpha$ la famille de feuillets au-dessus de U le long de p. Alors chaque U_α est envoyé dans $q^{-1}(U)$ par f. En effet, $p = q \circ f$ et $p(U_\alpha) = U$. De plus, U_α est homéomorphe à U via p, et est donc connexe. f étant continue, $f(U_\alpha)$ est aussi connexe, et est dans $q^{-1}(U)$. Ainsi, cet ensemble est inclus dans un des feuillets au-dessus de U le long de q.
On en déduit alors l'égalité : $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{f(U_\alpha) \subset V} U_\alpha$. En effet, l'inclusion réciproque étant évidente, démontrons l'inclusion directe. Si $x \in f^{-1}(V)$, alors $f(x) \in V$. Donc, en composant par q, $p(x) \in q(V) \subset U$. Donc $x \in p^{-1}(U)$. x est donc dans l'un des feuillets U_α. Ce feuillet est envoyé sur V par f car, d'après ce qui précède, $f(U_\alpha)$ est inclus dans l'un des feuillets de U le long de q. V étant l'un de ces feuillets, et puisque nous avons $q(x) \in V$, le feuillet en question ne peut être que V. Donc $f(U_\alpha) \subset V$. L'égalité est ainsi démontrée.

Reste à montrer que f induit un homéomorphisme de U_α sur V. Nous avons $p = q \circ f$. Donc si nous restraignons cette égalité à un des U_α de l'union, nous avons : $p_{|U_\alpha} = q \circ f_{|U_\alpha} = q_{|V} \circ f_{|U_\alpha}$. Donc $f_{|U_\alpha} = q_{|V}^{-1} \circ p_{|U_\alpha}$ est un homéomorphisme de U_α dans V.

□

Dans ce cas précis, nous observons alors que l'existence d'un morphisme de revêtement de $\widetilde{X_1}$ dans $\widetilde{X_2}$ nous montre alors que $\widetilde{X_1}$ est un revêtement de $\widetilde{X_2}$. Intuitivement, cela signifie que $\widetilde{X_1}$ est un revêtement de X plus gros que $\widetilde{X_2}$.

Définition 2.3.4. *Soit* X *un espace topologique.*
Un revêtement universel de X *est un revêtement galoisien* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *tel que pour tout revêtement connexe* $q : \widetilde{X}' \longrightarrow X$*, il existe un morphisme de revêtement de* $\widetilde{X}$ *sur* $\widetilde{X}'$.

Une première propriété remarquable d'un revêtement universel est son unicité à isomorphisme près. Avant de démontrer ceci, commençant par un lemme intéressant sur les revêtements galoisiens :

Lemme 2.3.2. *Soit* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *un revêtement galoisien. Alors tout endomorphisme du revêtement* p *est un automorphisme.*

Démonstration. Soit $h : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ un endomorphisme de p, c'est-à-dire une application continue telle que $p \circ h = p$. Soit $x \in X$. Puisque $Aut(\widetilde{X})$ agit transitivement sur la fibre de x, $\exists g \in Aut(\widetilde{X}), g(x) = h(x)$. g et h sont donc deux relèvements de p qui coïncident en un point. Puisque $\widetilde{X}$ est connexe, on en déduit $h = g$.

□

Proposition 2.3.3. *Soit X un espace topologique.*
Si X admet un revêtement universel, alors il est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Soient $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ et $q : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ deux revêtements universels de X. En particulier, ils sont galoisiens et donc connexes. Par hypothèses, il existe deux morphismes de revêtements f_1 et f_2 tels que $p = q \circ f_1$ et $q = p \circ f_2$, puisque p et q sont universels. On en déduit que $p = p \circ f_2 \circ f_1$. $f_2 \circ f_1$ est donc un endomorphisme de revêtement de p qui est galoisien. C'est donc un automorphisme de revêtement. Il en est de même pour $f_1 \circ f_2$. En particulier, $f_1 \circ f_2$ est injectif, donc f_2 l'est aussi. $f_2 \circ f_1$ est surjectif, donc f_2 aussi. f_2 est donc une bijection. Or, $g = f_2 \circ f_1$ est un homéomorphisme, donc $f_2^{-1} = f_1 \circ g^{-1}$ est continue. f_2 est donc un isomorphisme de revêtement entre p et q.

□

Nous avons démontré l'unicité du revêtement universel à isomorphisme près. Qu'en est-il seulement de l'existence ? Sous certaines hypothèses locales sur X, nous pouvons garantir l'existence d'un tel revêtement, qui sera en fait le revêtement fabriqué à la proposition 2.2.1.

Théorème 2.3.1. *Tout revêtement simplement connexe d'un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe est universel.*

Démonstration. Appelons $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ ce revêtement simplement connexe. Alors il est connexe, et son groupe induit est trivial, puisque le groupe fondamental de $\widetilde{X}$ est trivial. Ce groupe est donc en particulier distingué dans $\pi_1(X)$. Donc d'après la caractérisation 2.3.1, p est galoisien. De plus, soit $q : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ un autre revêtement connexe (ou de façon équivalente connexe par arcs) de X. On note $H' = q_*(\pi_1(\widetilde{X}'))$ et $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = \{1\}$. Alors bien sûr $H < H'$. On peut donc relever p le long de q d'après le critère de relèvement, ce qui induit un morphisme recherché.

□

Corollaire 2.3.1. *Tout espace connexe par arcs localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe admet un revêtement universel.*

Démonstration. Immédiat par la proposition précédente et par 2.2.1.

□

On observe alors bien qu'un revêtement simplement connexe d'un espace localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe est en fait "le plus gros" revêtement de cet espace. En effet, son groupe induit est inclut dans tous les autres, étant trivial. Donc, pour tout revêtement connexe de cet espace, il existe un morphisme de revêtement du revêtement universel vers ce revêtement. Le lemme que nous avons démontré au début de cette section montre alors que le revêtement simplement connexe est aussi un revêtement de cet espace, et peut donc être qualifié de "plus gros".

2.4 Applications des revêtements à l'algèbre

De façon surprenante, cette théorie nous donne une façon de démontrer un théorème intuitif, mais difficile à démontrer en algèbre. Il s'agit du théorème de Nielsen-Schreier, qui affirme que tout sous-groupe d'un groupe libre est encore libre. L'énoncé semble évident, cependant sa démonstration l'est moins. Mais avec la théorie des revêtements, cela devient beaucoup plus simple. En particulier, nous pouvons même, dans le cas où le groupe ambiant a un nombre fini de générateur, donner explicitement le nombre de générateur d'un quelconque sous-groupe.

2.4.1 Graphes

Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de quelques outils pour sa démonstration ; il s'agit des graphes, qui forment un cas particulier de CW-complexe. Dans cette étude, seul ceux de dimensions 1 (voir 0) nous intéresseront ici, et ce sont ce qu'on appelle des graphes.

Définition 2.4.1. *On appelle graphe tout ensemble obtenu à partir d'un ensemble discret de points X^0 et d'une famille d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ comme quotient de la réunion disjointe $X^0 \coprod_{\alpha\in A} I_\alpha$ par une relation d'équivalence identifiant les points du bord des intervalles avec des points de X^0.*

Dans ce cas, les éléments de X^0 sont appelés sommets du graphe et les éléments e_α correspondant à l'intervalle ouvert I_α dans le quotient sont appelés les côtés. Remarquons alors que $\overline{e_\alpha}$ est homéomorphe à I ou à $\mathbb{S}^1$, auquel cas les deux extrémités de I_α sont identifiés aux mêmes points.

La topologie de cet espace est donc issue de la topologie quotient et de la topologie coproduit. On en déduit alors une caractérisation immédiate pour qu'un ensemble soit ouvert dans un graphe :

Proposition 2.4.1. *Soit X un graphe de sommets X^0 et de côtés $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$. Soit $U \subset X$. U est ouvert (respectivement fermé) dans le graphe si et seulement si $\forall\alpha \in A$, $U \cap \overline{e_\alpha}$ est ouvert (respectivement fermé) dans $\overline{e_\alpha}$.*

Démonstration. Direct, par définition de la topologie quotient et coproduit.

□

Cette topologie particulière est dite *topologie faible* et donne un critère intéressant pour montrer qu'un espace est ouvert dans un graphe.

Lemme 2.4.1. *Tout graphe est localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.*

Démonstration. Soit X ce graphe. Si U est un ouvert du graphe et x un élément du graphe dans l'intérieur d'une arrête, cette arrête forme un voisinage ouvert connexe par arcs, que nous pouvons réduire pour l'inclure dans U. Dans le cas où x est un sommet, chaque arrête ayant x pour extrémité admette un voisinage ouvert dans l'arrête homéomorphe à $[0;1[$, que nous pouvons aussi réduire pour l'inclure dans U. En prenant l'union de tels ensembles sur toutes les arrêtes contenant x, on obtient un voisinage ouvert connexe par arcs de x dans U. X est donc bien localement connexe par arcs.

Pour le deuxième point, si $x \in X$ est dans l'intérieur d'une des arrêtes, alors cette arrête ouverte est de groupe fondamental trivial. Donc $\pi_1(U,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$ est trivial. Dans le cas où x est une arrête, notons $\overline{St(x)}$ l'union des arrêtes admettant x comme extrémité, comme précédemment. On note $St(x)$ l'ensemble obtenu à partir de $\overline{St(x)}$ en retirant les extrémités autres que x. Cet ensemble est alors ouvert. De plus, soit f un lacet basé en x dans $St(x)$. Puisque I est compact, et que f est continue, il en est de même pour $f(I)$ qui est donc inclut dans une union d'arrêtes qui composent $St(x)$. Ces arrêtes forment des ouverts dans le graphe. Donc, par compacité, $f(I)$ est contenu dans une union finie de ces arrêtes. Puisque cette union est finie, elle se rétracte par déformation sur x. f est donc homotope au lacet constant basé en x. Donc $\pi_1(St(x),x)$ est trivial. X est donc bien semi-localement simplement connexe.

□

Ainsi, un graphe est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. De plus, nous pouvons appliquer à un graphe connexe la plupart des propositions que nous avons vu pour les revêtements, notamment 2.2.2.

Avant de continuer, introduisons quelques nouvelles définitions.

Définition 2.4.2. *Soit X un graphe.*
Un sous-graphe de X est un sous-espace $Y \subset X$ obtenu par une union de sommets et de côtés de X de tel sorte que quel que soit le côté $e \subset Y$, on ait $\overline{e} \subset Y$. Ceci implique en fait que Y est un espace fermé dans X.

On dit qu'un graphe X est un arbre si c'est un espace contractile. En particulier, un arbre d'un graphe quelconque X désignera un sous-graphe Y qui est lui-même un arbre. Enfin, un arbre est dit maximal dans X si il contient tous les sommets de X, c'est-à-dire les points de X^0.

Remarquons alors que le couple (X,T) où T est un arbre quelconque est en fait un CW-pair.

Proposition 2.4.2. *Soit X un graphe connexe.*
Alors X contient un arbre maximal. De plus, tout arbre de X est contenu dans un arbre maximal.

Démonstration. Soit X_0 un arbre quelconque de X. Dans un premier temps, nous allons construire une suite de sous-graphes $X_0 \subset X_1 \subset ...$ dont l'union va donner l'ensemble X. X_0

est déjà donné. Supposons X_i construit. Alors on construit X_{i+1} en partant de X_i dont on adjoint les fermés $\overline{e_\alpha}$ tels que $e_\alpha \subset X \backslash X_i$ admette au moins une extrémité dans X_i. Alors $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. En effet, soit X' cette union. Alors X' est exactement l'union de certains $\overline{e_\alpha}$ et, par construction, si on prends $\overline{e}$ un côté de X, soit il ne rencontre pas X', soit il est entièrement inclut dans X'. En d'autres termes, pour tout e côté de X, $X' \cap \overline{e}$ est ouvert et fermé dans $\overline{e}$. Donc X' est ouvert et fermé dans X connexe. Donc $X = X'$.

Construisons maintenant un arbre maximal qui contient X_0. On pose pour cela $Y_0 = X_0$. Alors Y_0 contient bien-sûr tous les sommets de X_0. Supposons construit $Y_i \subset X_i$ qui contient tous les sommets de X_i. On pose alors Y_{i+1} obtenu par Y_i en lui adjoignant un côté reliant un point de $X_{i+1} \backslash X_i$ à un point de Y_i dans X. On pose Y l'union des Y_i. Alors, par construction, Y contient tous les sommets de X. En effet, un sommet de X est en particulier, par l'égalité du paragraphe précédent, un sommet de X_i et donc un sommet de Y_i. Enfin, Y est trivialement un arbre puisque d'après la proposition 1.4.1, Y se rétracte par déformation (forte) sur $Y_1 = X_1$ qui est un arbre. Donc Y est contractile ce qui démontre la proposition.

□

Avant de continuer, faisons une petite remarque. Soient X un graphe connexe et T un arbre maximal de X. Soit $x_0 \in T$ un point base. Alors chaque côté e_α de $X \backslash T$ induit un lacet f_α de x_0, composé du chemin partant de x_0 vers une des extrémités de e_α dans T, puis, via e_α, allant à l'autre extrémité lui aussi dans T avant de revenir vers x_0. Ces chemins sont bien définie puisque T est connexe, et donc connexe par arcs (puisque localement connexe par arcs). Ce chemin ainsi définie ne dépends, à homotopie près, que de e_α, puisque T est simplement connexe (puisqu'il est contractile).

Lemme 2.4.2. *Soit X un graphe connexe et soit T un arbre maximal de X. Alors $(X;T)$ possède la propriété d'extension des homotopies.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de la proposition 1.4.3, puisque $(X;T)$ désigne un CW-pair.

□

Proposition 2.4.3. *Soient X un graphe connexe et T un arbre maximal de X.*
Alors $\pi_1(X)$ est un groupe libre sur l'ensemble des $[f_\alpha]$ où f_α corresponds au lacet associé à $e_\alpha \subset X \backslash T$ précédemment définie.

Démonstration. Par la propriété 1.4.2, l'application quotient $X \longrightarrow X/T$ est une équivalence d'homotopie. Ainsi, le groupe fondamental de X est exactement le groupe fondamental de X/T. Or, puisque T est un arbre maximal, X/T est un graphe avec un seul sommet. Ses côtés sont donc nécessairement homéomorphes à des cercles, donc X/T est un bouquet de cercle. Son groupe fondamental est donc libre, en tant que produit libre de copies de $\mathbb{Z}$, de base les $[f_\alpha]$ qui correspondent aux lacets donnés par les cercles.

□

Lemme 2.4.3. *Tout revêtement d'un graphe est aussi un graphe, dont les sommets et les côtés sont les antécédents par le revêtement des sommets et des côtés du graphe.*

Démonstration. Soit X un graphe, issu de la réunion disjointe $X^0 \coprod_{\alpha \in A} I_\alpha$. Soit $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement. On pose $\widetilde{X}^0 = p^{-1}(X^0)$. On applique la propriété de relèvements des chemins aux applications $I_\alpha \longrightarrow X$ issue de la projection, ce qui nous donne des relèvements $I_\alpha \longrightarrow \widetilde{X}$ basés en $x \in \widetilde{X}^0$ qui joueront le rôle des côtés.

□

2.4.2 Théorème de Nielsen-Schreier

Avec tous ces éléments, nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème de Nielsen-Schreier. Dans ce paragraphe, nous démontrerons deux versions du théorème. Le premier est le plus général, tandis que le deuxième est une version plus précise du premier, explicitant en fait le nombre de générateurs du sous-groupe du groupe libre.

Théorème 2.4.1. *(de Nielsen-Schreier)*
Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Démonstration. Soit F un groupe libre. Soit X un graphe connexe tel que $\pi_1(X) \cong F$, par exemple un bouquet de cercles correspondant à la base de F. Alors, par la proposition 2.2.2, pour tout sous-groupe G de F, il existe un revêtement connexe par arcs $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tel que $p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = G$. p_* étant injective, on a donc $\pi_1(\widetilde{X}) \cong G$. Or, par le lemme précédent, $\widetilde{X}$ est aussi un graphe, dont le groupe est libre par la proposition 2.4.3. G est donc libre.

□

Ce résultat est le plus général que nous pouvons avoir sur les sous-groupes d'un groupe libre. Nous n'avons cependant que peu d'informations sur les générateurs, si ce n'est que la connaissance des générateurs de $\pi_1(\widetilde{X})$ nous donne, par isomorphisme, les générateurs de G. En fait, dans certains cas, cet isomorphisme va nous permettre de savoir le nombre exact de générateur.

Lemme 2.4.4. *Soit X un graphe connexe avec s sommets et c côtés. Alors $\pi_1(X)$ possède $c - s + 1$ générateurs.*

Démonstration. Soit T un arbre maximal de X. Nous savons que les générateurs de $\pi_1(X)$ sont exactement les $[f_\alpha]$ où $e_\alpha \subset X \backslash T$, qui correspondent eux-même au nombre de cercles dans $X \backslash T$. Dénombrer ces cercles, c'est donc exactement dénombrer le nombre de générateur de $\pi_1(X)$.

On démontre la propriété par récurrence sur le nombre c de côtés. Si $c = 1$, alors le graphe possède soit un sommet, soit deux sommets. Si on a un sommet, le côté en question est un cercle. Le groupe fondamental possède donc un seul générateur, ce qui corresponds bien à $c - s + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$. Si on a deux sommets, le côté est homéomorphe à I, qui est contractile. Donc le groupe fondamental est réduit à un point, et ne possède alors aucun générateur, ce qui corresponds bien à $c - s + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. La formule est donc vraie pour $c = 1$.

Si maintenant on suppose la formule vraie pour des graphes connexes à c côtés, soit X un graphe connexe à $c + 1$ côtés. Si X est un arbre, alors chaque côté apporte un sommet, sans compter le sommet de départ. Donc $s = c + 2$, et le nombre de générateur est nul puisque X est déjà un arbre maximal de lui-même. On a donc bien la formule $c + 1 - s + 1 = 0$. Sinon, soit T un arbre maximal de X, et soit e un côté dans $X \backslash T$. Alors, si on note $\widetilde{X}$ le graphe obtenu en retirant e, $\widetilde{X}$ est encore connexe, puisque T est un arbre maximal. Par hypothèse de récurrence, le groupe fondamental de $\widetilde{X}$ possède alors $c - s + 1$ générateurs. Puisque le côté e corresponds à un cercle dans $X \backslash T$, et donc à un générateur, le rajouter ajoute un générateur. Donc le groupe fondamental de X possède $c + 1 - s + 1$ générateurs.

L'égalité est ainsi démontrée.

□

Corollaire 2.4.1. *Soit F un groupe libre sur n générateurs et soit $G < F$ d'indice fini d dans F.*
Alors G est libre avec $dn - d + 1$ générateurs.

Ce résultat très puissant est aussi très surprenant, puisqu'il montre qu'un sous-groupe d'un groupe libre peut avoir plus de générateurs que le groupe ambiant, ce qui est assez contre-intuitif quand on pense en terme d'espaces vectoriels par exemple.

Démonstration. Pour démontrer ceci, nous allons reprendre le même principe que la démonstration générale du théorème de Nielsen-Schreier. Soit pour cela X un graphe connexe dont le groupe fondamental est isomorphe à F, comme dans la démonstration précédente. Si X possède c côtés et s sommets, alors on a l'égalité $n = c - s + 1$ par ce qui précède. Soit maintenant G un sous-groupe d'indice d dans F.

Alors, comme dans le théorème précédent, il existe un revêtement $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tel que $p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = G$. Or, par la section précédente, $\widetilde{X}$ est encore un graphe dont les sommets et les côtés sont exactement les relèvements des sommets et des côtés de X. Puisque l'indice ici est d, le nombre de feuillet de p est d, puisqu'il est égal à l'indice de $p_*(\pi_1(\widetilde{X}))$ dans $\pi_1(X)$, soit l'indice de G dans F. Donc $\widetilde{X}$ possède dc côtés et ds sommets. Ainsi, par ce qui précède, G possède $dc - ds + 1$ générateurs, soit $dc - ds + 1 = d(c - s + 1) - d + 1 = dn - d + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

□

Bibliographie

[1] HATCHER Allen, *Algebraic topology*, Cambridge university press

[2] FULTON William, *Algebraic Topology A First course*, Springer

[3] GODBILLON Claude, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann

[4] MUNKRES James, *Topology second edition*, Pearson Education

[5] GEOGHEGAN Ross, *Topological methods in group theory*, Springer

[6] Henri Paul de Saint-Gervais, *Analysis Situs*, consultable via le lien http ://analysis-situs.math.cnrs.fr