Théorème de Weierstrass

Leçons concernées

- **201 :** Espaces de fonctions. Exemples et applications
- **203 :** Utilisation de la notion de compacité.
- **209 :** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
- **209 :** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- **209 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Réference

- *Gourdon - Analyse*

Nous allons démontrer le théorème de Weierstrass :

Théorème. *Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[a;b]$.*

Pour ce faire, nous allons avoir besoin d'une notion : on dit qu'une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ (χ_n) est une approximation de l'unité si, pour tout n, $\chi_n \geq 0$, $||\chi_n||_1 = 1$ et : $\forall \delta > 0, \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{|x|>\delta} \chi_n(t)dt = 0$.
Le lemme suivant nous montre l'importance d'une telle notion :

Lemme. *Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$. Alors $(f * \chi_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. f est une fonction continue à support compact. Donc, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$, et δ le réel assuré par l'assertion précédente pour ε. On sait qu'il existe $N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N, \left| \int_{|x|\geq\delta} \chi_n(t)dt \right| \leq \varepsilon$ puisque (χ_n) est une approximation de l'unité, d'après le troisième point.
On calcule, pour $n \geq N$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f * \chi_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\chi_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\chi_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t)dt$$

car la norme L^1 de χ_n vaut 1.

On sépare l'intégrale en deux pour avoir :

$$f * \chi_n(x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t)dt + \int_{|t|>\delta} (f(x-t) - f(x))\chi_n(t)dt$$

D'où l'inégalité :

$$|f * \chi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)dt + 2||f||_\infty \int_{|t|>\delta} \chi_n(t)dt \leq \varepsilon(1 + 2||f||_\infty)$$

Le membre de droite ne dépendant pas de x, on a $||f * \chi_n - f||_\infty \leq \varepsilon(1 + 2||f||_\infty)$ pour $n \geq N$ d'où le résultat de convergence.

$\square$

On va alors chercher une approximation de l'unité intéressante. Posons $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$ et $P_n(t) = \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n \mathbb{1}_{[-1;1]}(t)$.
Montrons que (P_n) définie une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$. On remarque tout d'abord que $P_n \geq 0$ et $||P_n||_1 = 1$ par construction. Montrons le troisième point dans la définition de l'approximation de l'unité. Nous allons le prouver pour $0 < \delta < 1$ puisque pour $\delta \geq 1$, P_n est nulle. Alors, on a tout d'abord :

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^1 2t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Donc :

$$\int_{|t|>\delta} P_n(t)dt = 2\int_\delta^1 \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n dt \leq 2(n+1)(1-\delta^2)^n$$

et cette dernière quantité tends vers 0 pour $n \longrightarrow +\infty$ par les croissances comparées. (P_n) est donc bien une approximation de l'unité.

Regardons maintenant ce qui se passe pour f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à support dans $[-1/2; 1/2]$. Alors, d'après le lemme que nous avons démontré, nous avons en particulier la convergence uniforme de $f * P_n$ vers f, cette fois-ci sur $[-1/2; 1/2]$ (puisque la norme infinie sur cet ensemble est plus petit que la norme infinie sur $\mathbb{R}$). Or, pour $x \in [-1/2; 1/2]$:

$$f * P_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)P_n(x-t)dt$$

De plus, pour x et t entre $-1/2$ et $1/2$, $|x-t| \leq 1$ donc on peut remplacer P_n par son expression sur $[-1; 1]$:

$$f * P_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\frac{1}{a_n}(1-(x-t)^2)^n dt = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} f(t)q_k(t)dt \right) x^k$$

où q_k est une fonction polynomiale. Ainsi, $f * P_n$ est un polynôme sur $[-1/2; 1/2]$ pour tout n, ce qui prouve le théorème dans ce cas précis.

On va maintenant prendre f une fonction continue sur $[a; b]$. Nous allons tout faire pour nous ramener au cas que nous venons de décrire. Pour cela, prenons $c < a$ et $d > b$. On étends f de façon affine sur $[c; d]$ de sorte que $f(c) = f(d) = 0$, puis on l'étends sur $\mathbb{R}$ par la fonction nulle. On obtient alors une fonction continue à support dans $[c; d]$.

Soit maintenant la fonction φ définie par : $\forall x \in [-1/2; 1/2], \varphi(x) = (d-c)x + \frac{d+c}{2}$. Cette application forme une bijection affine de $[-1/2; 1/2]$ sur $[c; d]$.

Alors, d'après ce qui précède, $f \circ \varphi^{-1}$ est limite uniforme d'une suite (ψ_n) de polynômes sur $[-1/2; 1/2]$. Donc, par changement de variables, f est limite uniforme de la suite $(\psi_n \circ \varphi)$ sur $[c; d]$, et donc sur $[a; b]$, qui est une suite de polynômes car φ est une fonction affine, ce qu'il fallait démontrer.

Remarques :

— Détaillons le fait que si f est continue à support compact, alors f est uniformément continue. En fait, il suffit de supposer que $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ et que f est continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M > 0$ tel que si $|x| > M, |f(x)| \leq \varepsilon/2$. De plus, f est continue sur le compact $[-1-M; M+1]$ donc uniformément continue. Soit δ ce module d'uniforme continuité, qu'on peut supposer $\delta < 1$ quitte à le prendre plus petit. Alors, si x et y sont deux réels tels que $|x-y| < \delta$, alors ou bien les deux sont dans $[-1-M; M+1]$ auquel cas, on a bien $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ou bien ils sont dans $|t| > M$ et donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

— On peut aussi utiliser les polynômes de Bernstein pour prouver ce théorème (utilise des arguments de probabilités).

— Ce théorème se prouve aussi à partir du théorème de Féjer. En effet, pour cela, sans nuire à la généralité, prenons une fonction F continue sur $[-1; 1]$. On pose alors $f(t) = F(cos(t))$ qui est une fonction continue 2π-périodique. Puisque cette fonction est paire, ses coefficients de Fourier vérifient $c_{-n}(f) = c_n(f)$ pour tout $n \geq 0$. On écrit alors la somme de Césaro $\sigma_n(f)$, qui est une somme de coefficients fois des termes de la forme $cos(nt)$, et qui converge uniformément vers f d'après le théorème de Féjer. Les polynômes de Tchebytchev T_n sont des polynômes tels que $T_n(cos(t)) = cos(nt)$, qu'on peut trouver à l'aide des formules de Moivre, en prenant la partie réelle. Ceci nous permet alors d'avoir un polynôme qui converge uniformément vers F sur $[-1; 1]$, et on fait à nouveau un changement de variable affine pour avoir le résultat. Voir le Queffélec-Zuily pour plus de détails.